1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD において，辺 BC 上に B とは異なる点 P を取り，線分 AP の垂直 2 等分線が辺 AB，辺 AD またはその延長と交わる点をそれぞれ Q，R とする．

(1) 線分 QR の長さを $\sin\angle\mathrm{BAP}$ を用いて表せ．
(2) 点 P が動くときの線分 QR の長さの最小値を求めよ．

(18 京都大 文 2)

---

【答】

(1) $\dfrac{1}{2\sin\angle\mathrm{BAP}(1-\sin^2\angle\,\mathrm{BAP})}$

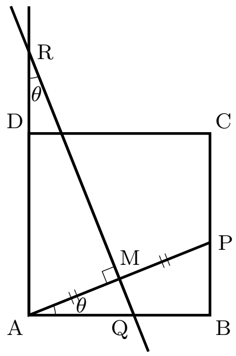
(2) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

---

【解答】

(1) $\angle\mathrm{BAP}=\theta$ とし，線分 AP の中点を M とする．

$$0<\theta\leqq\frac{\pi}{4} \qquad \cdots\cdots ①$$




$\triangle\mathrm{AMQ}\backsim\triangle\mathrm{RAQ}$ より $\angle\mathrm{ARQ}=\theta$ だから

$$\begin{aligned}\mathrm{QR}&=\frac{\mathrm{AQ}}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\mathrm{AM}}{\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\cdot\frac{\mathrm{AP}}{2}\\&=\frac{1}{2\sin\theta\cos\theta}\cdot\frac{\mathrm{AB}}{\cos\theta}\\&=\frac{1}{2\sin\theta(1-\sin^2\theta)}\end{aligned}$$

すなわち

$$\mathrm{QR}=\boldsymbol{\frac{1}{2\sin\angle\mathrm{BAP}(1-\sin^2\angle\mathrm{BAP})}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- $\triangle\mathrm{AMQ}\backsim\triangle\mathrm{AMR}$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{QR}&=\mathrm{QM}+\mathrm{MR}=\mathrm{AM}\tan\theta+\frac{\mathrm{AM}}{\tan\theta}=\frac{\mathrm{AP}}{2}\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)\\&=\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{AB}}{\cos\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\frac{1}{2\cos\theta}\cdot\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\\&=\frac{1}{2\sin\theta(1-\sin^2\theta)}\end{aligned}$$

(2) $t=\sin\theta$ とおくと，① から $0<t\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であり

$$\mathrm{QR}=\frac{1}{2t(1-t^2)}$$

である．$f(t)=2t(1-t^2)$ とおくと

$$f'(t)=2(1-3t^2)=-6\left(t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$f(t)$ の増減表は右のようになり，$f(t)$ は $t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ で極大かつ最大となる．最大値は

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3\sqrt{3}}$$

| $t$ | $(0)$ | $\cdots$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\cdots$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(t)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

よって，線分 QR の長さは $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき

最小値 $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{4}}$ ……(答)

をとる．