実数 t に対して

$$P(x)=x^3-2tx^2+(2t^2+2t+1)x-t(t+1)^2$$

とする．x についての方程式 $P(x)=0$ が異なる 3 つの実数解 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ をもつとき，次の問いに答えよ．

(1) $P(t)$ の値を求めよ．

(2) t のとり得る値の範囲を求めよ．

(3) t が (2) で求めた範囲を動くとき，$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma$ のとり得る値の範囲を求めよ．

(18 横浜国大 後 経済・経営 8)

【答】

(1) 0

(2) $-2<t<-1$ または $-1<t<-\dfrac{2}{3}$

(3) $-2-2\sqrt{2}\leqq\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma<-2$ または $-2<\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma<-\dfrac{4}{27}$

【解答】

$$P(x)=x^3-2tx^2+(2t^2+2t+1)x-t(t+1)^2\ (t\text{ は実数})\qquad\cdots\cdots ①$$

(1) ①より

$$\begin{aligned}P(t)&=t^3-2t^3+(2t^3+2t^2+t)-(t^3+2t^2+t)\\&=\mathbf{0}\end{aligned}$$

……(答)

(2) (1) より，$P(x)$ は $x-t$ を因数にもつ．$P(x)$ を $x-t$ で割ると

$$P(x)=(x-t)\{x^2-tx+(t+1)^2\}$$

$Q(x)=x^2-tx+(t+1)^2$ とおき，$Q(x)=0$ の判別式を D とすると，$P(x)=0$ が相異なる 3 つの実数解 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ をもつための条件は

$Q(x)=0$ が t 以外の異なる 2 つの実数解をもつ

$$\iff\begin{cases}D>0\\Q(t)\neq 0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}t^2-4(t+1)^2>0\\(t+1)^2\neq 0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}-(t+2)(3t+2)>0\\t\neq -1\end{cases}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{-2<t<-1}\ \text{または}\ \boldsymbol{-1<t<-\frac{2}{3}}$$

……(答)

(3) $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は $P(x)=0$ の異なる 3 つの実数解である．$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma$ の対称性より，$\alpha=t$ で，$\beta,\ \gamma$ は $Q(x)=0$ の異なる 2 つの実数解であるとしてよい．

$$\begin{aligned}&\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma\\=&t^3+(\beta+\gamma)^3-3\beta\gamma(\beta+\gamma)-3t\beta\gamma\\=&t^3+t^3-3(t+1)^2t-3t(t+1)^2\quad(\because\ \text{解と係数の関係})\\=&2t^3-6t(t^2+2t+1)\\=&-4t^3-12t^2-6t\end{aligned}$$

$f(t)=-4t^3-12t^2-6t$ とおくと

$$f'(t)=-12t^2-24t-6=-6(2t^2+4t+1)$$

$2t^2+4t+1=0$ の 2 つの解は $t=\dfrac{-2\pm\sqrt{2}}{2}$ である．

$$-2<\frac{-2-\sqrt{2}}{2}<-1,\quad -\frac{2}{3}<\frac{-2+\sqrt{2}}{2}$$

であり

$$f(-2)=-4,\quad f(-1)=-2,\quad f\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{4}{27}$$

であるから，(2) の範囲での増減表は次のようになる．

t	(-2)	$\cdots$	$\dfrac{-2-\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	(-1)	$\cdots$	$\left(-\dfrac{2}{3}\right)$
$f'(t)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(t)$	(-4)	$\searrow$		$\nearrow$	(-2)	$\nearrow$	$\left(-\dfrac{4}{27}\right)$

また，極小値 $f\left(\dfrac{-2-\sqrt{2}}{2}\right)$ は

$$f(t)=-(2t^2+4t+1)(2t+2)+4t+2$$

より

$$f\left(\frac{-2-\sqrt{2}}{2}\right)=4\cdot\frac{-2-\sqrt{2}}{2}+2=-2-2\sqrt{2}$$

よって，t が (2) の範囲を動くとき，$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma$ のとり得る値の範囲は

$$\boldsymbol{-2-2\sqrt{2}\leqq\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma<-2}$$

または

$$\boldsymbol{-2<\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma<-\frac{4}{27}}$$ ……(答)

である．

- $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma$ については，次のようにして t で表してもよい．公式より

$$\begin{aligned}&\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma\\=&(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)\\=&(\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}\end{aligned}$$

と変形される．α, β, γ は $P(x)=0$ の 3 つの解であり，解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=2t \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2t^2+2t+1 \end{cases}$$

であるから

$$\begin{aligned} &\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma \\ =&2t\{4t^2-3(2t^2+2t+1)\} \\ =&2t(-2t^2-6t-3) \\ =&-4t^3-12t^2-6t \end{aligned}$$