$a > 0$ とし，

$$f(x) = x^3 - 3a^2x$$

とおく．

(1) $x \geqq 1$ で $f(x)$ が単調に増加するための，a についての条件を求めよ．

(2) 次の 2 条件をみたす点 $(a,\ b)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ．

条件 1：方程式 $f(x) = b$ は相異なる 3 実数解をもつ．

条件 2：さらに，方程式 $f(x) = b$ の解を $\alpha < \beta < \gamma$ とすると $\beta > 1$ である．

(18 東京大 文 3)

【答】

(1) $0 < a \leqq 1$

(2) $a > 1$ かつ $-2a^3 < b < 1 - 3a^2$，図略

【解答】

$$f(x) = x^3 - 3a^2x$$

(1) $f(x)$ を x で微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3a^2 \\ &= 3(x+a)(x-a) \end{aligned}$$

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$2a^2$	$\searrow$	$-2a^2$	$\nearrow$

である．$a > 0$ より $f(x)$ の増減は右表となる．

$x \geqq 1$ で $f(x)$ が単調に増加するための a の条件は

$$x \geqq 1 \text{ においてつねに } f'(x) \geqq 0 \text{ である} \iff a \leqq 1 \quad (\because\ \text{増減表})$$

であり，$a > 0$ をあわせると

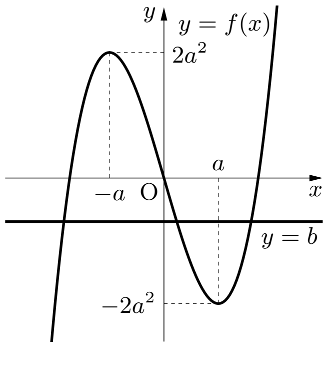
$$\boldsymbol{0 < a \leqq 1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 方程式 $f(x) = b$ の実数解は曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = b$ の共有点の x 座標である．

条件 (1) が成り立つ $y = f(x)$ と $y = b$ のグラフは左図であり，これを満たす条件は

$$f(a) < b < f(-a) \qquad \cdots\cdots ①$$



である．このとき，$f(x) = b$ の異なる 3 実数解を α，β，γ $(\alpha < \beta < \gamma)$ とすると

$$\alpha < -a < \beta < a < \gamma \qquad \cdots\cdots ②$$

である．

次に，条件 (2) を考える．(1) より $0 < a \leqq 1$ のときは，$x \geqq 1$ の範囲で $f(x)$ は単調増加であり，$x \geqq 1$ の範囲で異なる 2 実数解 β，γ をもつことはない．$\beta > 1$ であるためには

$$a > 1 \qquad \cdots\cdots ③$$

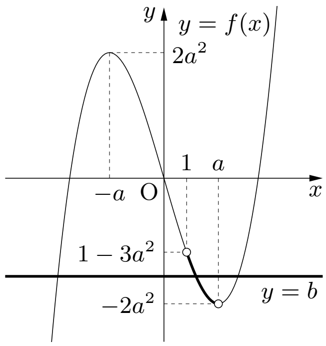
であることが必要である．

②，③のもとで，条件 (2) の $\beta > 1$ であることは

$$1 < \beta < a \qquad \cdots\cdots ④$$

すなわち，左図となることである．$1 \leqq x \leqq a$ の範囲で $f(x)$ は単調減少であるから，これを満たす条件は

$$f(a) < f(\beta) < f(1)$$
$$\Longleftrightarrow f(a) < b < f(1) \qquad (②を満たす)$$
$$\Longleftrightarrow -2a^2 < b < 1-3a^2 \qquad \cdots\cdots ⑤$$



以上より，与えられた 2 条件が成り立つための a，b の条件は，「③かつ⑤」すなわち

$$\begin{cases} \boldsymbol{a > 1} \\ \boldsymbol{-2a^3 < b < 1-3a^2} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

$b=-2a^3$ と $b=1-3a^2$ を連立すると

$$2a^3-3a^2+1=0$$
$$(a-1)^2(2a+1)=0$$
$$\therefore \quad a = 1(重解),\ -\frac{1}{2}$$

であるから，2 曲線 $b=-2a^3$，$b=1-3a^2$ は点 $(1,\ -2)$ で接している．

点 $(a,\ b)$ の動きうる範囲は**下図の斜線部分**となる．境界は含まない． ……(答)