2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ について次の問に答えよ．ただし係数 $a,\ b,\ c$ は実数で，$a \neq 0$ とする．

(1) $a=c=1$ のとき，$\displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\,dx=0$ となる実数 k が存在するような b の値の範囲を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx=\int_k^{k+1} f(x)\,dx$ となる実数 k を $a,\ b$ を用いて表せ．

(3) $\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx=\int_k^{k+1} f(x)\,dx=\int_{k+1}^{k+2} f(x)\,dx$ となる実数 k は存在しないことを示せ．

(18 東京海洋大 生命・資源 2)

【答】

(1) $b \leqq -\dfrac{\sqrt{39}}{3},\ \dfrac{\sqrt{39}}{3} \leqq b$

(2) $k=-\dfrac{b}{2a}$

(3) 略

【解答】

(1) $a=c=1$ のとき，$f(x)=x^2+bx+1$ であり

$$\begin{aligned}\int_k^{k+1} f(x)\,dx &= \left[\frac{x^3}{3}+b\frac{x^2}{2}+x\right]_k^{k+1}\\ &= \frac{(k+1)^3-k^3}{3}+b\frac{(k+1)^2-k^2}{2}+\{(k+1)-k\}\\ &= \frac{3k^2+3k+1}{3}+b\frac{2k+1}{2}+1\\ &= k^2+(b+1)k+\frac{b}{2}+\frac{4}{3}\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\,dx=0$ となる実数 k が存在する条件は，k についての 2 次方程式

$$k^2+(b+1)k+\frac{b}{2}+\frac{4}{3}=0$$

が実数解をもつことであるから

$$\text{判別式} : (b+1)^2-4\left(\frac{b}{2}+\frac{4}{3}\right) \geqq 0$$

$$b^2-\frac{13}{3} \geqq 0$$

$$\left(b-\frac{\sqrt{39}}{3}\right)\left(b+\frac{\sqrt{39}}{3}\right) \geqq 0$$

よって，求める b の値の範囲は

$$\boldsymbol{b \leqq -\frac{\sqrt{39}}{3},\quad \frac{\sqrt{39}}{3} \leqq b} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $$\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx = \int_{k}^{k+1} f(x)\,dx \qquad \cdots\cdots \text{Ⓐ}$$

左辺，右辺を計算すると

$$\begin{aligned}\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx &= \left[a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx\right]_{k-1}^{k} \\ &= a\frac{k^3-(k-1)^3}{3} + b\frac{k^2-(k-1)^2}{2} + c\{k-(k-1)\} \\ &= a\frac{3k^2-3k+1}{3} + b\frac{2k-1}{2} + c \\ &= ak^2 + (b-a)k + \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + c \qquad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{k}^{k+1} f(x)\,dx &= \left[a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx\right]_{k}^{k+1} \\ &= a\frac{(k+1)^3-k^3}{3} + b\frac{(k+1)^2-k^2}{2} + c\{(k+1)-k\} \\ &= a\frac{3k^2+3k+1}{3} + b\frac{2k+1}{2} + c \\ &= ak^2 + (b+a)k + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c \qquad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

よって

$$\text{Ⓐ} \iff ak^2 + (b-a)k + \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + c = ak^2 + (b+a)k + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c$$

$$\therefore \quad -2ak = b$$

$a \fallingdotseq 0$ より $\boldsymbol{k = -\dfrac{b}{2a}}$ $\cdots\cdots$ ③ ……(答)

- ① の k を $k+1$ とすれば ② が得られる．すなわち

$$\begin{aligned}\int_{k}^{k+1} f(x)\,dx &= a(k+1)^2 + (b-a)(k+1) + \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + c \\ &= a(k^2+2k+1) + (b-a)(k+1) + \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + c \\ &= ak^2 + (b+a)k + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c\end{aligned}$$

(3) $$\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx = \int_{k}^{k+1} f(x)\,dx = \int_{k+1}^{k+2} f(x)\,dx$$

$$\iff \begin{cases} \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx = \int_{k}^{k+1} f(x)\,dx & \cdots\cdots \text{Ⓐ} \\ \displaystyle\int_{k}^{k+1} f(x)\,dx = \int_{k+1}^{k+2} f(x)\,dx & \cdots\cdots \text{Ⓑ} \end{cases}$$

Ⓑ は Ⓐ の k を $k+1$ とすればよく

$$\text{Ⓑ} \iff k+1 = -\frac{b}{2a} \qquad \cdots\cdots ④$$

③，④より

$$k = k+1$$

これをを満たす実数 k の値は存在しない． …… (証明終わり)