次の問いに答えよ．ただし，$a>0$ とする．

(1) 関数 $y=|x^2-a^2|$ のグラフの概形をかけ．

(2) 定積分 $S=\displaystyle\int_0^2 |x^2-a^2|\,dx$ を a を用いて表せ．

(3) S の最小値とそのときの a の値を求めよ．

(18 新潟大 文系 4)

【答】

(1) 略

(2) $S=\begin{cases}\dfrac{4}{3}a^3-2a^2+\dfrac{8}{3} & (0<a\leqq 2 \text{ のとき}) \\ 2a^2-\dfrac{8}{3} & (2\leqq a \text{ のとき})\end{cases}$

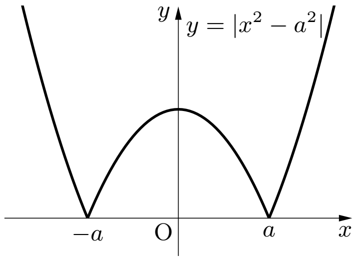
(3) $a=1$ のとき，最小値 2

【解答】

(1) $a>0$ より

$$y=|x^2-a^2|$$
$$=\begin{cases}x^2-a^2 & (x\leqq -a,\ a\leqq x \text{ のとき}) \\ -(x^2-a^2) & (-a\leqq x\leqq a \text{ のとき})\end{cases}$$

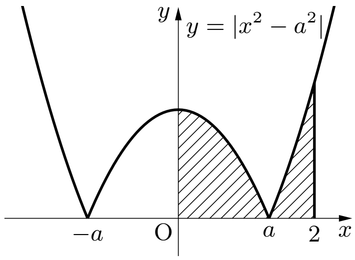
であり，グラフの概形は右図となる．　……(答)



(2) $x=a$ が積分区間 $0\leqq x\leqq 2$ に含まれるか否かで場合分けする．

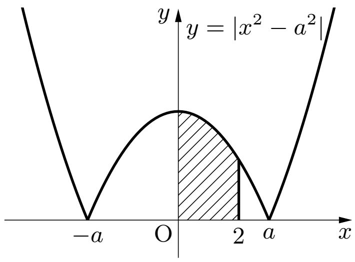
(i) $0<a\leqq 2$ のとき；

$$S=\int_0^a\{-(x^2-a^2)\}dx+\int_a^2(x^2-a^2)\,dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+a^2x\right]_0^a+\left[\frac{x^3}{3}-a^2x\right]_a^2$$
$$=\frac{2}{3}a^3+\left(\frac{8}{3}-2a^2+\frac{2}{3}a^3\right)$$
$$=\frac{4}{3}a^3-2a^2+\frac{8}{3}$$



(ii) $2\leqq a$ のとき；

$$S=\int_0^2\{-(x^2-a^2)\}\,dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+a^2x\right]_0^2$$
$$=2a^2-\frac{8}{3}$$



(i)，(ii) より

$$\boldsymbol{S=\begin{cases}\dfrac{4}{3}a^3-2a^2+\dfrac{8}{3} & (0<a\leqq 2 \text{ のとき}) \\ 2a^2-\dfrac{8}{3} & (2\leqq a \text{ のとき})\end{cases}}$$
……(答)

(3) $2 \leqq a$ のとき S は単調増加である．
$0 < a < 2$ のとき

$$S' = 4a^2 - 4a = 4a(a-1)$$

であり，S の増減表は右のようになる．

a	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
S'	(0)	$-$	0	$+$		$+$
S		$\searrow$		$\nearrow$	$\frac{16}{3}$	$\nearrow$

よって，S は $\boldsymbol{a = 1}$ のとき極小かつ最小となり， ……(答)
最小値は

$$S(1) = \frac{4}{3} \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + \frac{8}{3} = \mathbf{2}$$ ……(答)

である．