$\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$ であるとき，以下の各問いに答えよ．ただし，a は実数とする．

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) a の値をすべて求めよ．

(3) $\displaystyle b\int_x^{x+2} f(t)\,dt = xf'(x) + cx - 2$ を満たす b, c の値を求めよ．

(18 昭和大 歯・薬・保 3)

【答】

(1) $f(x) = 6x^2 - 10x + 1$

(2) $a = -\dfrac{1}{2}$，1，2

(3) $b = 1$, $c = 14$

【解答】

(1) $$\int_a^x f(t)\,dt = 2x^3 - 5x^2 + x + 2 \quad \cdots\cdots ①$$

両辺を x で微分すると

$$\boldsymbol{f(x) = 6x^2 - 10x + 1} \quad \cdots\cdots(答)$$

(2) ① の x に a を代入すると，$\displaystyle\int_a^a f(t)\,dt = 0$ より

$$2a^3 - 5a^2 + a + 2 = 0$$
$$(a-1)(a-2)(2a+1) = 0$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{a = -\frac{1}{2},\ 1,\ 2} \quad \cdots\cdots(答)$$

(3) $$b\int_x^{x+2} f(t)\,dt = xf'(x) + cx - 2 \quad \cdots\cdots ②$$

$f'(x) = 12x - 10$ であるから，② は

$$b\int_x^{x+2} f(t)\,dt = x(12x - 10) + cx - 2 \quad \cdots\cdots ㋐$$

である．両辺を x で微分すると

$$b\{f(x+2) - f(x)\} = 24x - 10 + c \quad \cdots\cdots ③$$

となる．ここで

$$\begin{aligned} & f(x+2) - f(x) \\ =& \{6(x+2)^2 - 10(x+2) + 1\} - (6x^2 - 10x + 1) \\ =& (6x^2 + 14x + 5) - (6x^2 - 10x + 1) \\ =& 24x + 4 \end{aligned}$$

であるから，③ は

$$b(24x + 4) = 24x - 10 + c$$

これは x について恒等式なので，係数比較して

$$\begin{cases} 24b = 24 \\ 4b = -10 + c \end{cases}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{b = 1,\ c = 14}$$ ……(答)

- ㋐から先は積分を実行して，係数比較でもよい．

$$\begin{aligned} \int_x^{x+2} f(t)\,dt = \int_x^{x+2} (6x^2 - 10x + 1)\,dt &= \Big[2x^3 - 5x^2 + x\Big]_x^{x+2} \\ &= 2\{(x+2)^3 - x^3\} - 5\{(x+2)^2 - x^2\} + \{(x+2) - x\} \\ &= 2(6x^2 + 12x + 8) - 5(4x + 4) + 2 \\ &= 12x^2 + 4x - 2 \end{aligned}$$

より，㋐は

$$b(12x^2 + 4x - 2) = 12x^2 + (c - 10)x - 2$$

係数を比較して

$$\begin{cases} 12b = 12 \\ 4b = c - 10 \\ -2b = -2 \end{cases}$$

$$\therefore \quad b = 1,\ c = 14 \quad (3\text{ 式を満たす})$$