関数 $f(x)$ を $f(x)=-(x-1)^2+2$ とおく．$y=f(x)$ のグラフを $x$ 軸方向に 1 だけ平行移動した放物線を $y=g(x)$ とする．曲線 $C: y=\left|\dfrac{1}{2}f(x)\right|$ と放物線 $y=g(x)$ で囲まれた部分の面積を $S_1$ とする．また，連立不等式

$$\begin{cases} y \leqq 2 \\ y \geqq \left|\dfrac{1}{2}f(x)\right| \\ y \geqq g(x) \end{cases}$$

の表す領域の面積を $S_2$ とする．次の各問に答えなさい．

(1) 放物線 $y=f(x)$ の $x=t$ における接線の傾きを $a$，切片を $b$ とする．

(i) 放物線 $y=f(x)$ の頂点の座標を求めなさい．

(ii) $a,\ b$ をそれぞれ $t$ の式で表しなさい．

(iii) $b$ が最小値をとるとき，$a,\ b,\ t$ の値をそれぞれ求めなさい．

(2) (i) 放物線 $y=g(x)$ の方程式を求めなさい．

(ii) 曲線 $C$ と放物線 $y=g(x)$ のすべての共有点の座標を求めなさい．

(iii) 曲線 $C$ と直線 $y=2$ のすべての共有点の座標を求めなさい．

(iv) $S_1,\ S_2$ の値をそれぞれ求めなさい．

(18 帯広畜産大 2)

---

【答】

(1) (i) $(1,\ 2)$

(ii) $a=-2t+2,\ b=t^2+1$

(iii) $a=2,\ b=1,\ t=0$

(2) (i) $y=-x^2+4x-2$

(ii) $(1,\ 1)$，$(3,\ 1)$

(iii) $\left(1\pm\sqrt{6},\ 2\right)$

(iv) $S_1=4-\dfrac{4}{3}\sqrt{2},\ S_2=-4-\dfrac{4}{3}\sqrt{2}+4\sqrt{6}$

---

【解答】

$$f(x)=-(x-1)^2+2$$
$$g(x)=f(x-1)$$

(1) (i) 放物線 $y=f(x)$ の頂点の座標は

$$\mathbf{(1,\ 2)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(ii)
$$f(x)=-x^2+2x+1$$
$$f'(x)=-2x+2$$

であり，放物線 $y=f(x)$ の $x=t$ における接線の方程式は

$$y=(-2t+2)(x-t)-t^2+2t+1$$
$$\therefore\quad y=(-2t+2)x+t^2+1$$

である．よって，$x=t$ における接線の傾き $a$，$y$ 切片 $b$ は

$$\boldsymbol{a=-2t+2,\ b=t^2+1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- 問題文では「切片を $b$ とする」とあるが,「$y$ 切片を $b$ とする」と解釈した．

(iii) $t$ はすべての実数を動くから，$b=t^2+1$ が最小値をとるときの $t$ の値は

$$\boldsymbol{t=0} \qquad \cdots\cdots(答)$$

であり，このときの $a$, $b$ の値は

$$\boldsymbol{a=2,\ b=1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) (i) 放物線 $y=g(x)$ の方程式は

$$y=f(x-1)=-\{(x-1)-1\}^2+2$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{y=-x^2+4x-2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(ii) 曲線 $C:y=\left|\dfrac{1}{2}f(x)\right|$ と放物線 $y=g(x)$ の共有点の $x$ 座標は

$$\left|\frac{1}{2}(-x^2+2x+1)\right|=-x^2+4x-2 \qquad \cdots\cdots ①$$

の解である．

(ア) $f(x)=-(x-1)^2+2\geqq 0\ (1-\sqrt{2}\leqq x\leqq 1+\sqrt{2})$ のとき

$$① \iff -\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}=-x^2+4x-2$$

$$x^2-6x+5=0$$

$$(x-1)(x-5)=0$$

(ア) の範囲に注意すると　$x=1$

(イ) $f(x)=-(x-1)^2+2<0\ (x<1-\sqrt{2}$ または $1+\sqrt{2}<x)$ のとき

$$① \iff \frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}=-x^2+4x-2$$

$$3x^2-10x+3=0$$

$$(x-3)(3x-1)=0$$

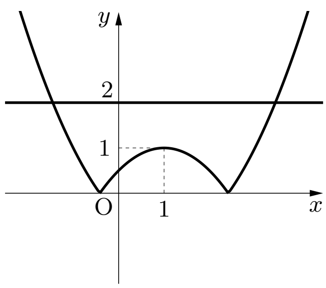
(イ) の範囲に注意すると　$x=3$

以上 (ア)，(イ) より，曲線 $C$ と放物線 $y=g(x)$ のすべての共有点の座標は

$$\boldsymbol{(1,\ 1),\ (3,\ 1)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(iii) $1-\sqrt{2}\leqq x\leqq 1+\sqrt{2}$ のとき $\dfrac{1}{2}f(x)\leqq\dfrac{1}{2}f(1)=1$ であるから，曲線 $C:y=\left|\dfrac{1}{2}f(x)\right|$ と直線 $y=2$ が共有点をもたない．曲線 $C:y=\left|\dfrac{1}{2}f(x)\right|$ と直線 $y=2$ が共有点をもつのは，$x<1-\sqrt{2}$ または $1+\sqrt{2}<x$ のときであり，共有点の $x$ 座標は




$$-\frac{1}{2}f(x)=2$$

$$\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}=2$$

$$x^2-2x-5=0$$

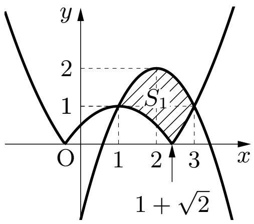
$$\therefore\quad x=1\pm\sqrt{6}$$

よって，曲線 $C$ と直線 $y=2$ のすべての共有点の座標は

$$\boldsymbol{(1\pm\sqrt{6},\ 2)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

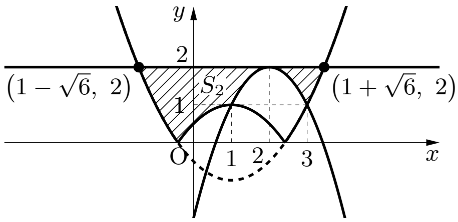
(iv) 曲線 $C$ と放物線 $y=g(x)$ で囲まれた部分の面積 $S_1$ は




$$
\begin{aligned}
S_1 &= \int_1^{1+\sqrt{2}} \left\{(-x^2+4x-2)-\left(-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}\right)\right\} dx \\
&\quad + \int_{1+\sqrt{2}}^{3} \left\{(-x^2+4x-2)-\left(\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}\right)\right\} dx \\
&= \int_1^{1+\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{2}\right) dx \\
&\quad + \int_{1+\sqrt{2}}^{3} \left(-\frac{3}{2}x^2+5x-\frac{3}{2}\right) dx \\
&= \left[-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{2}x\right]_1^{1+\sqrt{2}} + \left[-\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{2}x^2-\frac{3}{2}x\right]_{1+\sqrt{2}}^{3} \\
&= -\frac{1}{6}\{(1+\sqrt{2})^3-1\}+\frac{3}{2}\{(1+\sqrt{2})^2-1\}-\frac{5}{2}\sqrt{2} \\
&\quad -\frac{1}{2}\{27-(1+\sqrt{2})^3\}+\frac{5}{2}\{9-(1+\sqrt{2})^2\}-\frac{3}{2}(2-\sqrt{2}) \\
&= -\frac{1}{6}(6+5\sqrt{2})+\frac{3}{2}(2+2\sqrt{2})-\frac{5}{2}\sqrt{2} \\
&\quad -\frac{1}{2}(20-5\sqrt{2})+\frac{5}{2}(6-2\sqrt{2})-\frac{3}{2}(2-\sqrt{2}) \\
&= \boldsymbol{4-\frac{4}{3}\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

……(答)

また，連立不等式




$$
\begin{cases}
y \leqq 2 \\
y \geqq \left|\dfrac{1}{2}f(x)\right| \\
y \geqq g(x)
\end{cases}
$$

の表す領域の面積 $S_2$ は

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \int_{1-\sqrt{6}}^{1+\sqrt{6}} \left\{2-\left(\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}\right)\right\} dx - 2\times\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \left\{-\left(\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}\right)\right\} dx - S_1 \\
&= -\frac{1}{2}\int_{1-\sqrt{6}}^{1+\sqrt{6}} (x-1+\sqrt{6})(x-1-\sqrt{6})\, dx \\
&\quad -2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} (x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})\, dx - S_1 \\
&= -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(2\sqrt{6})^3-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(2\sqrt{2})^3-S_1 \\
&= 4\sqrt{6}-\frac{8}{3}\sqrt{2}-\left(4-\frac{4}{3}\sqrt{2}\right) \\
&= \boldsymbol{-4-\frac{4}{3}\sqrt{2}+4\sqrt{6}}
\end{aligned}
$$

……(答)

である．