次の問いに答えよ．

(1) 次の条件 (A) を満たす座標平面上の点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ．

(A) 2 次式 t^2-ut+v は，$0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1$ を満たす実数 $x,\ y$ を用いて $t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$ と因数分解される．

(2) 次の条件 (B) を満たす座標平面上の点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ．

(B) 2 次式 t^2-ut+v は，$0 \leqq x \leqq 1,\ 1 \leqq y \leqq 2$ を満たす実数 $x,\ y$ を用いて $t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$ と因数分解される．

(3) 座標平面上の点 $(x,\ y)$ が 4 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする長方形の周および内部を動くとき，点 $(x+y,\ xy)$ の動く範囲の面積を求めよ．

(18 広島大 理系 1)

【答】

(1) 図略

(2) 図略

(3) $\dfrac{7}{6}$

【解答】

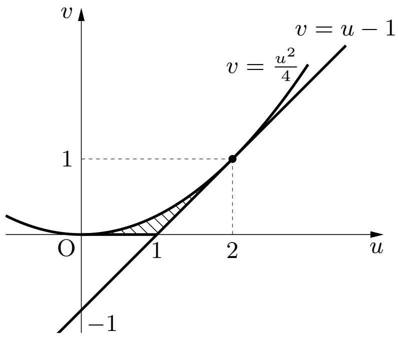
$f(t)=t^2-ut+v$ とおく．

(1) $f(t)=(t-x)(t-y)$ と因数分解されるから，
$x,\ y$ は $f(t)=0$ の解である．したがって

(A) $\iff$ 2 次方程式 $f(t)=0$ が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲に 2 つの実数解をもつ (重解も含む)

$$\iff \begin{cases} (\text{判別式}) = u^2-4v \geqq 0 \\ 0 \leqq \dfrac{u}{2} \leqq 1 \\ f(0)=v \geqq 0 \\ f(1)=1-u+v \geqq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} v \leqq \dfrac{u^2}{4} \\ 0 \leqq u \leqq 2 \\ v \geqq 0 \\ v \geqq u-1 \end{cases}$$



$v=\dfrac{u^2}{4}$ と $v=u-1$ を連立すると

$$\frac{u^2}{4}=u-1 \qquad \therefore \quad u=2 \ (\text{重解})$$

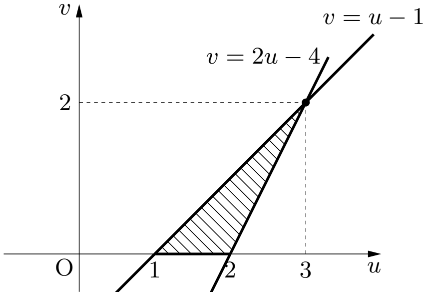
であり，$v=\dfrac{u^2}{4}$ と $v=u-1$ は点 $(2,\ 1)$ で接する．

よって，点 $(u,\ v)$ の存在範囲は**右図の斜線部分**となる．境界も含む． ……(答)

(2) $x,\ y$ が $f(t)=0$ の解であるから

(B) $\iff$ 2 次方程式 $f(t)=0$ が $0 \leqq t \leqq 1,\ 1 \leqq t \leqq 2$ の範囲に
それぞれ実数解をもつ ($t=1$ が重解となる場合を含む)

$$\iff \begin{cases} f(0)=v \geqq 0 \\ f(1)=1-u+v \leqq 0 \\ f(2)=4-2u+v \geqq 0 \end{cases}$$



$$\therefore \quad \begin{cases} v \geqq 0 \\ v \leqq u-1 \\ v \geqq 2u-4 \end{cases}$$

$v=u-1$ と $v=2u-4$ を連立すると

$$u-1=2u-4 \qquad \therefore \quad u=3$$

であり，$v=u-1$ と $v=2u-4$ は点 $(3,\ 2)$ で交わる．

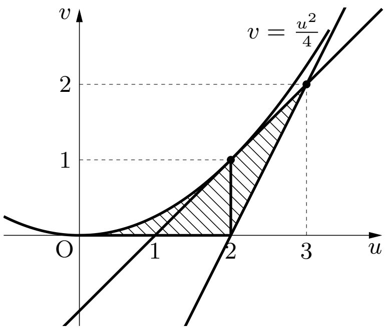
よって，点 $(u,\ v)$ の存在範囲は**右図の斜線部分**となる．境界も含む． ……(答)

(3) $u=x+y,\ v=xy$ とおくと，$x,\ y$ は 2 次方程式 $f(t)=0$ の解である．点 $(x,\ y)$ が 4 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする長方形の周および内部を動くとき，

$$0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 2$$

であるから，$u,\ v$ は (A) または (B) を満たす．

すなわち，点 $(u,\ v)$ の動く範囲は (1)，(2) の和集合であり，右図の斜線部分となる．境界も含む．



よって，求める面積は

$$\begin{aligned} &\int_0^2 \frac{u^2}{4}\,du + \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 1 \\ =&\left[\frac{u^3}{12}\right]_0^2 + \frac{1}{2} \\ =&\frac{2}{3}+\frac{1}{2} \\ =&\boldsymbol{\frac{7}{6}} \end{aligned}$$

……(答)

である．