座標平面上で，曲線 $y = -x^2 + 1\ (0 \leqq x \leqq 1)$ を C とする．実数 $a,\ b$ を定数とする 2 次関数

$$y = 2x^2 + ax + b \qquad \cdots\cdots ①$$

について，次の問いに答えよ．

(1) ①のグラフが曲線 C と共有点を 2 点持つとき，$a,\ b$ が満たす条件を求めよ．

(2) $a,\ b$ が (1) で求めた条件を満たすとき，①のグラフの頂点が描く図形を座標平面上に図示せよ．

(3) (2) で求めた図形の境界線で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(18 静岡大 教育・理 (生地)・農 2)

【答】

(1) $\begin{cases} b < \dfrac{a^2}{12} + 1 \\ -6 < a < 0 \\ b \geqq 1 \\ b \geqq -a - 2 \end{cases}$

(2) 略

(3) $\dfrac{3}{8}$

【解答】

$$C : y = -x^2 + 1\ (0 \leqq x \leqq 1)$$

$$y = 2x^2 + ax + b \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) C と①を連立して，y を消去すると

$$2x^2 + ax + b = -x^2 + 1$$

$$3x^2 + ax + b - 1 = 0$$

$f(x) = 3x^2 + ax + b - 1$ とおくと

$$f(x) = 3\left(x + \frac{a}{6}\right)^2 - \frac{a^2}{12} + b - 1$$

であり

① のグラフが C と共有点を 2 点もつ

$\Longleftrightarrow$ $f(x) = 0$ は $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつ

$\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \text{頂点の } y \text{ 座標} : -\dfrac{a^2}{12} + b - 1 < 0 \\ \text{軸の位置} : 0 < -\dfrac{a}{6} < 1 \\ \text{左端の符号} : f(0) \geqq 0 \\ \text{右端の符号} : f(1) \geqq 0 \end{cases}$

$$\therefore \begin{cases} \boldsymbol{b < \dfrac{a^2}{12} + 1} \\ \boldsymbol{-6 < a < 0} \\ \boldsymbol{b \geqq 1} \\ \boldsymbol{b \geqq -a - 2} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) ①を平方完成すると

$$y = 2\left(x + \frac{a}{4}\right)^2 - \frac{a^2}{8} + b$$

であり，①の頂点の座標は $\left(-\frac{a}{4},\ -\frac{a^2}{8} + b\right)$ である．

$$\begin{cases} x = -\frac{a}{4} \\ y = -\frac{a^2}{8} + b \end{cases} \quad \cdots\cdots ②$$

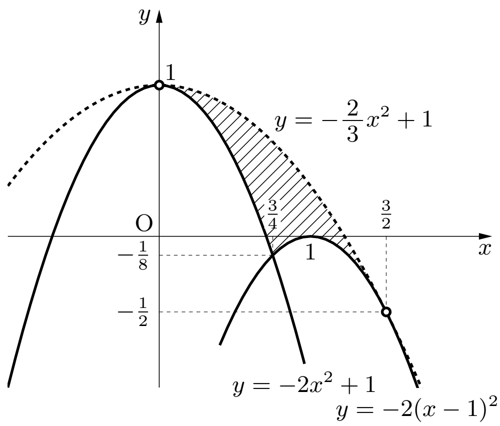
とおくと，a, b が (1) で求めた条件を満たすとき，①のグラフの頂点が描く図形は,「(1) の条件かつ②」を満たす a, b が存在するような $(x,\ y)$ の集合である．

$$② \iff \begin{cases} a = -4x \\ b = y + 2x^2 \end{cases}$$

であり，x, y の求める条件は

$$\begin{cases} y + 2x^2 < \frac{(-4x)^2}{12} + 1 \\ -6 < -4x < 0 \\ y + 2x^2 \geqq 1 \\ y + 2x^2 \geqq -(-4x) - 2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} y < -\frac{2}{3}x^2 + 1 \\ 0 < x < \frac{3}{2} \\ y \geqq -2x^2 + 1 \\ y \geqq -2(x-1)^2 \end{cases}$$



境界の曲線の位置関係を調べる．

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x^2 + 1 \\ y = -2x^2 + 1 \end{cases} \quad より \quad \frac{4}{3}x^2 = 0 \qquad 点\ (0,\ 1)\ で接する．$$

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x^2 + 1 \\ y = -2(x-1)^2 \end{cases} \quad より \quad \frac{4}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 0 \qquad 点\left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)で接する．$$

$$\begin{cases} y = -2x^2 + 1 \\ y = -2(x-1)^2 \end{cases} \quad より \quad 4x = 3 \qquad 点\left(\frac{3}{4},\ -\frac{1}{8}\right)で交わる．$$

よって，求める図形は右図の**斜線部分**である．境界は実線部分は含み，破線部分と白丸は除く．

……(答)

(3) 求める面積 S は

$$S = \int_0^{\frac{3}{4}} \left\{\left(-\frac{2}{3}x^2 + 1\right) - \left(-2x^2 + 1\right)\right\} dx + \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{3}{2}} \left\{\left(-\frac{2}{3}x^2 + 1\right) + 2(x-1)^2\right\} dx$$

$$= \int_0^{\frac{3}{4}} \frac{4}{3}x^2\, dx + \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{3}{2}} \frac{4}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 dx = \left[\frac{4}{9}x^3\right]_0^{\frac{3}{4}} + \left[\frac{4}{9}\left(x - \frac{3}{2}\right)^3\right]_{\frac{3}{4}}^{\frac{3}{2}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{3}{8}}$$

……(答)