

関数 $f(x)$ を

$$f(x) = |x^2 - 8x + 7| + x - 7$$

と定める.

- (1) $0 \leq x \leq 7$ における $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ.
 (2) 方程式 $f(x) - ax = 0$ が異なる 4 個の実数解をもつように, 定数 a の値の範囲を定めよ.
 (3) 関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt$$

と定めるとき, $0 \leq x \leq 7$ における $g(x)$ の最小値を求めよ.

(18 弘前大 人文・教育・農 3)

【答】

- (1) 最大値 $\frac{25}{4}$, 最小値 -6
 (2) $a = 9 - 2\sqrt{14}$
 (3) -6

【解答】

- (1) $y = f(x)$ のグラフを描く.

$$\begin{aligned} f(x) &= |x^2 - 8x + 7| + x - 7 \\ &= |(x-1)(x-7)| + x - 7 \end{aligned}$$

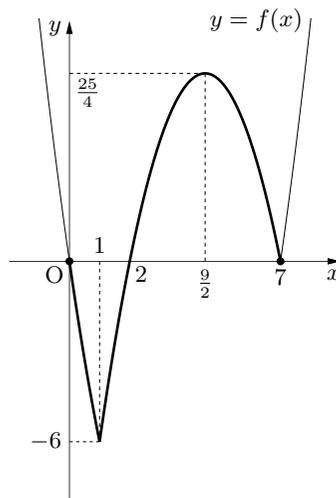
$x \leq 1, 7 \leq x$ のとき;

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 8x + 7) + x - 7 \\ &= x^2 - 7x \end{aligned}$$

$1 \leq x \leq 7$ のとき;

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x^2 - 8x + 7) + x - 7 \\ &= -x^2 + 9x - 14 \\ &= -\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \end{aligned}$$

$0 \leq x \leq 7$ における $y = f(x)$ のグラフは右図の太線部分となるから, $0 \leq x \leq 7$ において $f(x)$ は



$$\text{最大値 } f\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{25}{4}, \quad \text{最小値 } f(1) = -6 \quad \dots\dots(\text{答})$$

をとる.

- (2) $f(x) - ax = 0 \iff f(x) = ax$
 $f(x) - ax = 0$ が異なる 4 個の実数解をもつ条件は, $y = f(x)$ と直線 $y = ax$ が異なる 4 つの共有点をもつことである.

$1 < x < 7$ において $y = f(x)$ と $y = ax$ が接する条件は

「 $f(x) - ax = 0$ は重解をもち、かつ
 $-1 < (\text{接点の } x \text{ 座標}) < 7$ が成り立つ」 …… (*)

ことである.

$$f(x) - ax = -x^2 + (9 - a)x - 14$$

より

$$(*) \iff \begin{cases} \text{判別式: } (a - 9)^2 - 4 \cdot 14 = 0 \\ -1 < \frac{9 - a}{2} < 7 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 9 \pm 2\sqrt{14} \\ -5 < a < 11 \end{cases}$$

$$\therefore a = 9 - 2\sqrt{14}$$

よって、求める a の値の範囲は

$$0 < a < 9 - 2\sqrt{14} \quad \text{……(答)}$$

$$(3) \quad g(x) = \int_0^x f(t) dt$$

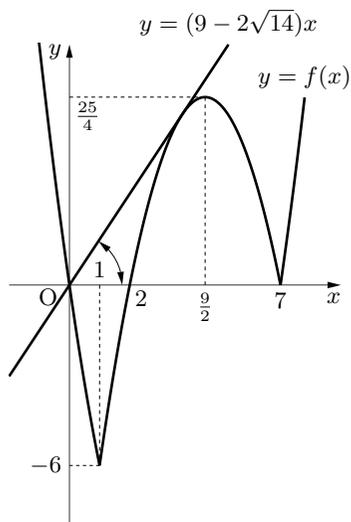
$$g'(x) = f(x)$$

$0 \leq x \leq 7$ における $y = g(x)$ の増減表は右のようなり、 $g(x)$ は $x = 2$ のとき最小となる.

求める最小値は

$$\begin{aligned} g(2) &= \int_0^2 f(t) dt \\ &= \int_0^1 f(t) dt + \int_1^2 f(t) dt \\ &= \int_0^1 (t^2 - 7t) dt + \int_1^2 (-t^2 + 9t - 14) dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} - 7 \cdot \frac{t^2}{2} \right]_0^1 + \left[-\frac{t^3}{3} + 9 \cdot \frac{t^2}{2} - 14t \right]_1^2 \\ &= -\frac{19}{6} - \frac{17}{6} \\ &= -6 \end{aligned}$$

……(答)



| | | | | | |
|---------|---|-----|---|-----|---|
| x | 0 | ... | 2 | ... | 7 |
| $g'(x)$ | | - | 0 | + | |
| $g(x)$ | | ↘ | | ↗ | |