座標平面上に点 O(0, 0), A(0, 1), B(-1, 1), C(-1, 0), P(t, 0) がある. ただし, t は正の実数である. また, 線分 OA 上の点および線分 BC 上の点を通る直線  $\ell: y=ax+b$  がある. 次の問いに答えよ.

- (1) 直線  $\ell$  が正方形 OABC の面積を 2 等分するとき, a を b を用いて表せ.
- (2) 直線  $\ell$  が正方形 OABC の面積を 2 等分し、さらに直角三角形 OAP の面積を 2 等分するとき、b を t を用いて表せ、
- (3)  $t \to +0$  および  $t \to \infty$  のときの (2) で求めた b の極限値をそれぞれ求めよ.

(18 新潟大 理系 3)

## 【答】

(1)  $a = 2b - 1 \ (0 \le b \le 1)$ 

(2) 
$$b = \frac{t+2-\sqrt{t^2+2t+2}}{2}$$

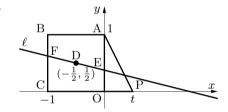
(3) 
$$\lim_{t \to +0} b = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$
,  $\lim_{t \to \infty} b = \frac{1}{2}$ 

## 【解答】

(1)  $\ell: y = ax + b$  が正方形 OABC の面積を 2 等分 するのは、 $\ell$  が正方形の対角線の交点  $D\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$  を通るときであり、このとき

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}a + b$$

$$\therefore a = 2b - 1 \qquad \dots \qquad (1)$$



である.

また, 直線  $\ell$  は線分 OA および線分 BC と交わるから, 交点をそれぞれ E, F とおくと, 座標は E(0, b), F(-1, b-a) であり

$$0 \le b \le 1$$
 かつ  $0 \le b - a \le 1$  …… ②

を満たす. ① より

$$b-a = b - (2b-1) = 1-b$$

であり、 $0 \le b - a \le 1$  は  $0 \le b \le 1$  となるから、① かつ ②は

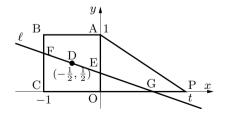
$$a = 2b - 1 \ (0 \le b \le 1)$$
 .....(答)

とまとめられる.

(2) (1) のもとで、直角三角形 OAP の面積を 2 等分するときの b を t を用いて表す.

ℓが線分 OP 上の点 G を通るとすると

$$\triangle OEG = \frac{1}{2} \cdot OG \cdot OE$$
  
 $< \frac{1}{2} \cdot OP \cdot \frac{1}{2}OA$   
 $= \frac{1}{2} \triangle OAP$ 

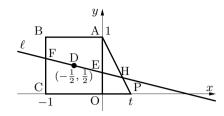


となり、 $\ell$  は  $\triangle$ OAP の面積を 2 等分しない. したがって、 $\ell$  は線分 AP と交わる.

 $\ell$  と線分 AP との交点を H とおく. H の x 座標は, 直線 AP の方程式  $y=-\frac{1}{t}x+1$  と  $\ell$  の方程式 y=ax+b を連立して

$$-\frac{1}{t}x + 1 = ax + b$$

$$\therefore \frac{at+1}{t}x = 1 - b$$



at+1=0 とすると、b=1 となり、 $\ell$  は直線 AD に重なる. 直線 AD は  $\triangle$ OAP の面積を 2 等分しないから、 $at+1 \neq 0$  である. したがって

$$x = \frac{(1-b)t}{at+1}$$

である.

△OAP の面積は

$$\triangle OAP = \frac{1}{2}OP \cdot OA = \frac{1}{2} \cdot t \cdot 1 = \frac{t}{2}$$

であり、 $\triangle AEH = \frac{1}{2} \triangle OAP$  であるから

$$\frac{1}{2} \cdot \text{AE} \cdot (\text{H} \, \mathcal{O} \, x \, \underline{\text{EFF}}) = \frac{1}{2} \times \frac{t}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} \cdot (1 - b) \cdot \frac{(1 - b)t}{at + 1} = \frac{1}{4}t$$

$$\therefore \quad 2(1 - b)^2 = at + 1 \quad (\because \ t \neq 0)$$

$$\therefore \quad 2(1 - b)^2 = (2b - 1)t + 1 \quad (\because \ \textcircled{1})$$

$$\therefore \quad 2b^2 - 2(t + 2)b + t + 1 = 0$$

$$\therefore \quad b = \frac{t + 2 \pm \sqrt{(t + 2)^2 - 2(t + 1)}}{2} = \frac{t + 2 \pm \sqrt{t^2 + 2t + 2}}{2}$$

 $0 \le b \le 1$  であるから

$$b = \frac{t+2-\sqrt{t^2+2t+2}}{2}$$
 .....(答)

である.

(3) (2) の結果より

$$\lim_{t \to +0} b = \lim_{t \to +0} \frac{t+2-\sqrt{t^2+2t+2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \qquad \cdots (2)$$

また

$$\lim_{t \to \infty} b = \lim_{t \to \infty} \frac{(t+2)^2 - (t^2 + 2t + 2)}{2(t+2+\sqrt{t^2 + 2t + 2})}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{t+1}{t+2+\sqrt{t^2 + 2t + 2}}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{1+\frac{1}{t}}{1+\frac{2}{t}+\sqrt{1+\frac{2}{t}+\frac{2}{t^2}}}$$

$$= \frac{1}{2} \qquad \cdots (2)$$

である.