次の問いに答えよ．

(1) $x>0$ の範囲で不等式

$$x-\frac{x^2}{2}<\log(1+x)<\frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

が成り立つことを示せ．

(2) x が $x>0$ の範囲を動くとき，

$$y=\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}$$

のとりうる値の範囲を求めよ．

(18 大阪大 理系 1)

【答】

(1) 略

(2) $0<y<\dfrac{1}{2}$

【解答】

$$x-\frac{x^2}{2}<\log(1+x)<\frac{x}{\sqrt{1+x}}\quad (x>0)\qquad \cdots\cdots ①$$

(1) $f(x)=\log(1+x)-\left(x-\dfrac{x^2}{2}\right)$ $(x>0)$ とおく．

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-(1-x)=\frac{x^2}{1+x}>0\quad (\because\ x>0)$$

$f(x)$ は増加関数で，$f(0)=0$ であるから，$x>0$ で $f(x)>0$ である．

したがって，$x>0$ で $x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)$ $\cdots\cdots$ ② が成り立つ．

次に $g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}-\log(1+x)$ $(x>0)$ とおくと

$$\begin{aligned}
g'(x)&=\frac{1}{1+x}\left(\sqrt{1+x}-\frac{x}{2\sqrt{1+x}}\right)-\frac{1}{1+x}\\
&=\frac{x+2-2\sqrt{1+x}}{2(1+x)\sqrt{1+x}}\\
&=\frac{(\sqrt{1+x}-1)^2}{2(1+x)\sqrt{1+x}}\\
&>0\ (\because\ x>0)
\end{aligned}$$

$g(x)$ は増加関数で，$g(0)=0$ であるから，$x>0$ で $g(x)>0$ である．

したがって，$x>0$ で $\log(1+x)<\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ $\cdots\cdots$ ③ が成り立つ．

以上，②，③から①は成り立つ．　$\cdots\cdots$ (証明終わり)

(2) $h(x)=\dfrac{1}{\log(1+x)}-\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ とおくと

$$\begin{aligned} h'(x) &= -\frac{1}{\{\log(1+x)\}^2}\cdot\frac{1}{1+x}+\frac{1}{x^2} \\ &= \frac{(1+x)\{\log(1+x)\}^2-x^2}{x^2(1+x)\{\log(1+x)\}^2} \\ &= \frac{1}{x^2\{\log(1+x)\}^2}\left\{\log(1+x)+\frac{x}{\sqrt{1+x}}\right\}\left\{\log(1+x)-\frac{x}{\sqrt{1+x}}\right\} \end{aligned}$$

③より $\log(1+x)-\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}<0$ だから $h'(x)<0$ である．よって $h(x)$ は減少関数である．また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}h(x)=0$ である．

次に，$\displaystyle\lim_{x\to+0}h(x)$ を求める．

$0<x<2$ のとき①の各値は正であるから

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{1+x}}{x}<\frac{1}{\log(1+x)}<\frac{2}{x(2-x)} \\ &\frac{\sqrt{1+x}}{x}-\frac{1}{x}<\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}<\frac{2}{x(2-x)}-\frac{1}{x} \\ &\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}<\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}<\frac{1}{2-x} \end{aligned}$$

すなわち，$0<x<2$ のとき

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}<h(x)<\frac{1}{2-x}$$

である．このとき

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to+0}\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}$$

であり，はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to+0}h(x)=\frac{1}{2}$$

である．以上より $y=\dfrac{1}{\log(1+x)}-\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ のとりうる値の範囲は

$$\boldsymbol{0<y<\frac{1}{2}}$$ ……(答)