$x \geqq 0$ の範囲で，関数

$$f_n(x) = e^x - 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f_2(x) \geqq 0$ であることを示せ．

(2) すべての自然数 n に対して，$f_n(x) \geqq 0$ であることを示せ．

(3) $f_3(x) \leqq x f_2(x)$ が成り立つことを示せ．

(4) $0 \leqq x < 1$ を満たす x について，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x - 1$ が成り立つことを示せ．

(18 静岡大 理 (数) 4)

【答】

(1) 略
(2) 略
(3) 略
(4) 略

【解答】

$$f_n(x) = e^x - 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)
$$f_2(x) = e^x - 1 - \sum_{k=1}^{2} \frac{x^k}{k!} = e^x - 1 - \left(x + \frac{x^2}{2}\right)$$

$f_2(x)$ の増減を調べる．

$$f_2{}'(x) = e^x - 1 - x$$
$$f_2{}''(x) = e^x - 1 \geqq e^0 - 1 = 0 \quad (\because\ x \geqq 0)$$

$x \geqq 0$ のとき $f_2{}'(x)$ は単調増加である．さらに

$$f_2{}'(x) \geqq f_2{}'(0) = e^0 - 1 - 0 = 0$$

であるから，$f_2(x)$ は単調増加である．

$$f_2(x) \geqq f_2(0) = e^0 - 1 - \left(0 + \frac{0}{2}\right) = 0$$

よって， $f_2(x) \geqq 0$ が成り立つ．　……(証明終わり)

(2) すべての自然数 n に対して，「$f_n(x) \geqq 0$ …… $(*)$」であることを数学的帰納法を用いて証明する．

(i) $n = 1$ のとき

$$f_1(x) = e^x - 1 - \sum_{k=1}^{1} \frac{x^k}{k!} = e^x - 1 - x = f_2{}'(x) \quad (\because\ (1))$$

(1) の議論より，$f_2{}'(x) \geqq 0$ であることは証明済みであり，$f_1(x) \geqq 0$ は成り立つ．

(ii) $n=l$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定する．

$$f_{l+1}(x)=e^x-1-\left\{x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{l+1}}{(l+1)!}\right\}$$

$f_{l+1}(x)$ の増減を調べる．

$$\begin{aligned}f_{l+1}{}'(x)&=e^x-\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^l}{l!}\right)\\&=e^x-1-\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^l}{l!}\right)\\&=f_l(x)\\&\geqq 0\quad(\because\ \text{帰納法の仮定})\end{aligned}$$

したがって，$f_{l+1}(x)$ は単調増加である．

$$f_{l+1}(x)\geqq f_{l+1}(0)=0$$

よって，$n=l+1$ のときにも $(*)$ は成り立つ．

(i)，(ii) から，すべての自然数 n に対して，$(*)$ が成り立つ．　　　　……(証明終わり)

(3) $g(x)=xf_2(x)-f_3(x)$ $(x\geqq 0)$ とおく．$f_2{}'(x)=f_1(x)$, $f_3{}'(x)=f_2(x)$ であるから

$$\begin{aligned}g'(x)&=1\cdot f_2(x)+xf_2{}'(x)-f_3{}'(x)\\&=f_2(x)+xf_1(x)-f_2(x)\\&=xf_1(x)\end{aligned}$$

(2) の (i) より，$f_1(x)\geqq 0$ であるから，$x\geqq 0$ のとき $g'(x)\geqq 0$

したがって，$g(x)$ は単調増加である．さらに

$$g(x)\geqq g(0)=0\cdot f_2(0)-f_3(0)=0$$

よって，$f_3(x)\leqq xf_2(x)$ が成り立つ．　　　　……(証明終わり)

(4) 目標の式を変形する．

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x-1&\iff\lim_{n\to\infty}\left(e^x-1-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)=0\\&\iff\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0\qquad\cdots\cdots(**)\end{aligned}$$

$(**)$ が成り立つことを示す．

$g_n(x)=xf_n(x)-f_{n+1}(x)$ $(x\geqq 0)$ とおく．$f_{n+1}{}'(x)=f_n(x)$ より

$$\begin{aligned}g_n{}'(x)&=1\cdot f_n(x)+xf_n{}'(x)-f_{n+1}{}'(x)\\&=f_n(x)+xf_{n-1}(x)-f_n(x)\\&=xf_{n-1}(x)\quad(\text{ただし，}n\geqq 2\text{ とする})\end{aligned}$$

$n\to\infty$ より $n\geqq 2$ としてよく，(2) より，$f_{n-1}(x)\geqq 0$ であるから，$x\geqq 0$ のとき $g_n{}'(x)\geqq 0$ である．したがって，$g_n(x)$ は単調増加である．さらに

$$g_n(x)\geqq g_n(0)=0$$

これと (2) をあわせると，$n\geqq 2$ のとき

$$0\leqq f_{n+1}(x)\leqq xf_n(x)$$

が成り立つ．この不等式を繰り返し用いると

$$0\leqq f_n(x)\leqq xf_{n-1}(x)\leqq x^2f_{n-2}(x)\leqq\cdots\leqq x^{n-2}f_2(x)$$

$0 \leqq x < 1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\{x^{n-2}f_2(x)\} = f_2(x)\lim_{n\to\infty}x^{n-2} = 0$$

であり，はさみうちの原理を用いると

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x) = 0$$

が成り立つ．すなわち $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = e^x - 1$ が成り立つ．　　　　　　……(証明終わり)