(1) 関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ $(x>0)$ を考える．$f(x)$ の増減を調べ，最大値とそのときの x の値を求めよ．

(2) $n^{n+1}<(n+1)^n$ を満たす自然数 n をすべて求めよ．

(18 龍谷大 理工 (推薦))

【答】

(1) 最大値 $\dfrac{1}{e}$ $(x=e)$

(2) $n=1,\ 2$

【解答】

(1) $$f(x)=\frac{\log x}{x}\quad (x>0)$$

微分して

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(\log x)\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$$

$x>0$ における $f(x)$ の増減は下表のようになる．

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

$f(x)$ は $\boldsymbol{x=e}$ で最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{e}}$ をとる． ……(答)

(2) $$n^{n+1}<(n+1)^n \qquad \cdots\cdots ①$$

n は自然数であるから，両辺は正であり，対数をとることができる．式変形すると

$$
\begin{aligned}
① &\iff (n+1)\log n<n\log(n+1)\\
&\iff \frac{\log n}{n}<\frac{\log(n+1)}{n+1}\\
&\iff f(n)<f(n+1) \qquad \cdots\cdots ②
\end{aligned}
$$

(1) の増減表より，$n\geqq e$ のとき，不等式 ② は成り立たないから，$0<n<e\ (=2.7\cdots)$ であることが必要である．すなわち，$n=1,\ 2$ が必要である．

(i) $n=1$ のとき

$$(①の左辺)=1^{1+1}=1,\quad (①の右辺)=(1+1)^1=2$$

不等式①は成り立つ．

- $f(1)=0,\ f(1+1)=\dfrac{\log 2}{2}>0$ より，不等式②は成り立つ．

(ii) $n=2$ のとき

$$(①の左辺)=2^{2+1}=8,\quad (①の右辺)=(2+1)^2=9$$

不等式①は成り立つ．

以上より，求める自然数 n は $\boldsymbol{n=1,\ 2}$ ……(答)