次の定積分を求めよ．

$$\int_0^1 \frac{1}{(e^{2x}+a)(e^{-2x}+a)}\,dx \quad (a\text{ は正の定数})$$

(18 弘前大 理工・医・教育 1(2))

【答】 $\begin{cases} \dfrac{e^2-1}{4(e^2+1)} & (a=1\text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{2(1-a^2)}\log\dfrac{e^2+a}{ae^2+1} & (a>0,\ a\fallingdotseq 1\text{ のとき}) \end{cases}$

【解答】

$I=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(e^{2x}+a)(e^{-2x}+a)}\,dx$ とおく．

$$I=\int_0^1 \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+a)(1+ae^{2x})}\,dx$$

$e^{2x}=t$ とおくと

$$2e^{2x}\,dx=dt \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \longrightarrow & 1 \\ \hline t & 1 & \longrightarrow & e^2 \end{array}$$

であるから

$$I=\int_1^{e^2}\frac{t}{(t+a)(1+at)}\,\frac{1}{2}\,dt=\frac{1}{2}\int_1^{e^2}\frac{1}{(t+a)(at+1)}\,dt$$

ここで

$$\frac{1}{(t+a)(at+1)}=\left(\frac{\frac{1}{a}}{t+a}-\frac{1}{at+1}\right)\frac{1}{\frac{1}{a}-a}$$

$$\left(\text{ただし}\frac{1}{a}-a\fallingdotseq 0,\ \text{すなわち } a\fallingdotseq 1(>0)\text{ とする}\right)$$

$$=\frac{1}{1-a^2}\left(\frac{1}{t+a}-\frac{a}{at+1}\right)$$

$a=1$ のとき

$$I=\frac{1}{2}\int_1^{e^2}\frac{1}{(t+1)^2}\,dt=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{(t+1)}\right]_1^{e^2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^2+1}+\frac{1}{2}\right)=\frac{e^2-1}{4(e^2+1)}$$

$a\fallingdotseq 1$ のとき

$$I=\frac{1}{2(1-a^2)}\int_1^{e^2}\left(\frac{1}{t+a}-\frac{a}{at+1}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2(1-a^2)}\Big[\log|t+a|-\log|at+1|\Big]_1^{e^2}$$

$$=\frac{1}{2(1-a^2)}\left[\log\left|\frac{t+a}{at+1}\right|\right]_1^{e^2}$$

$$=\frac{1}{2(1-a^2)}\log\frac{e^2+a}{ae^2+1}$$

以上より

$$\int_0^1 \frac{1}{(e^{2x}+a)(e^{-2x}+a)}\,dx = \begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{e^2-1}{4(e^2+1)}} & \textbf{(}\boldsymbol{a=1}\ \textbf{のとき)} \\ \boldsymbol{\dfrac{1}{2(1-a^2)}\log\dfrac{e^2+a}{ae^2+1}} & \textbf{(}\boldsymbol{a>0,\ a\fallingdotseq 1}\ \textbf{のとき)} \end{cases}$$

……(答)