定積分

$$\int_{-1}^{1} (\sin \pi x - ax - b)^2 \, dx$$

を最小にする実数 a, b の値を求めよ．

(18 一橋大 後 経済 5–A)

【答】 $a = \dfrac{3}{\pi}$, $b = 0$

【解答】

$I = \displaystyle\int_{-1}^{1} (\sin \pi x - ax - b)^2 \, dx$ とおく．被積分関数を偶関数，奇関数に分けると

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1} \left\{ \sin^2 \pi x - 2(ax+b) \sin \pi x + (ax+b)^2 \right\} dx \\ &= \int_{-1}^{1} \left\{ (\sin^2 \pi x - 2ax \sin \pi x + a^2x^2 + b^2) - 2b(\sin \pi x - ax) \right\} dx \end{aligned}$$

$\sin^2 \pi x - 2ax \sin \pi x + a^2x^2 + b^2$ は偶関数，$\sin \pi x - ax$ は奇関数であるから

$$I = 2\int_{0}^{1} (\sin^2 \pi x - 2ax \sin \pi x + a^2x^2 + b^2) \, dx$$

である．ここで

$$\int_0^1 \sin^2 \pi x \, dx = \int_0^1 \frac{1 - \cos 2\pi x}{2} \, dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2\pi x}{4\pi} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \sin \pi x dx &= \left[x \left(\frac{-\cos \pi x}{\pi} \right) \right]_0^1 + \int_0^1 1 \cdot \left(\frac{-\cos \pi x}{\pi} \right) dx \\ &= \frac{1}{\pi} + \left[\frac{\sin \pi x}{\pi^2} \right]_0^1 = \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

$$\int_0^1 (a^2x^2 + b^2) \, dx = \left[a^2 \frac{x^3}{3} + b^2 x \right]_0^1 = \frac{a^2}{3} + b^2$$

したがって

$$\begin{aligned} I &= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{2a}{\pi} + \frac{a^2}{3} + b^2 \right) \\ &= \frac{2}{3}a^2 - \frac{4}{\pi}a + 2b^2 + 1 \\ &= \frac{2}{3}\left(a - \frac{3}{\pi} \right)^2 + 2b^2 + 1 - \frac{6}{\pi^2} \end{aligned}$$

よって，I を最小にする a, b の値は

$$\boldsymbol{a = \frac{3}{\pi}, \ b = 0} \qquad \cdots\cdots(答)$$