次の問いに答えよ．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$ を求めよ．

(2) $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ で定義された関数 $f(x)$ が

$$f(x)\cos^2 x = \pi - \frac{x}{\log 2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t)\,dt$$

をみたすとき，$f(x)$ を求めよ．

(18 横浜国大 理工・都市科 1)

【答】

(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi - \log 2$

(2) $f(x) = \dfrac{\pi - 3x}{\cos^2 x}$

【解答】

(1) 部分積分法を用いる．

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} x(\tan x)'\,dx = \Big[x\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,dx \\ &= \frac{\pi}{3}\cdot\sqrt{3} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi + \Big[\log|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\pi + \log\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \log 2}\end{aligned}$$
……(答)

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t)\,dt$ は定数であり，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t)\,dt = a$ (a は定数) とおくと

$$f(x)\cos^2 x = \pi - \frac{a}{\log 2}x$$

$-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ において，$\cos x > 0$ だから

$$f(x) = \frac{\pi}{\cos^2 x} - \frac{a}{\log 2}\frac{x}{\cos^2 x}$$

であり

$$\begin{aligned}a &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\pi}{\cos^2 t} - \frac{a}{\log 2}\frac{t}{\cos^2 t}\right)dt \\ &= \pi\Big[\tan t\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{a}{\log 2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \log 2\right) \quad (\because\ (1)) \\ &= \sqrt{3}\pi - a\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{3\log 2} - 1\right)\end{aligned}$$

a について整理すると

$$a = 3\log 2$$

よって

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{\pi - 3x}{\cos^2 x}} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$
……(答)