$0 \leqq x \leqq 2\pi$ をみたす x に対し

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{1-\sin t}\,dt$$

とする．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $1 - \sin t = \left(\sin\dfrac{t}{2} - \cos\dfrac{t}{2}\right)^2$ が成り立つことを示しなさい．

(2) $f(x)$ を求めなさい．

(3) 正の整数 n に対し，定積分 $\displaystyle\int_0^{2n\pi} \sqrt{1-\sin t}\,dt$ の値を求めなさい．

(18 首都大学東京 後 理・環境・デザ 2)

【答】

(1) 略

(2) $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) - 2 & \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2} \text{ のとき}\right) \\ -2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) + 4\sqrt{2} - 2 & \left(\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq 2\pi \text{ のとき}\right) \end{cases}$

(3) $4\sqrt{2}n$

【解答】

(1) 右辺を展開すると

$$\begin{aligned}\left(\sin\frac{t}{2} - \cos\frac{t}{2}\right)^2 &= \sin^2\frac{t}{2} - 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} + \cos^2\frac{t}{2} \\ &= 1 - \sin t\end{aligned}$$

であるから

$$1 - \sin t = \left(\sin\frac{t}{2} - \cos\frac{t}{2}\right)^2$$

が成り立つ． ……(証明終わり)

(2) (1) より

$$\sqrt{1-\sin t} = \left|\sin\frac{t}{2} - \cos\frac{t}{2}\right| = \sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right|$$

である．x は $0 \leqq x \leqq 2\pi$ をみたすから

$$-\frac{\pi}{4} \leqq \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \leqq \frac{3\pi}{4}$$

$-\dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4} \leqq 0$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_0^x \sqrt{1-\sin t}\,dt \\ &= -\sqrt{2}\int_0^x \sin\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right) dt \\ &= -\sqrt{2}\left[-2\cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]_0^x \\ &= 2\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} \\ &= 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - 2\end{aligned}$$

$0 \leqq \dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{3\pi}{4} \quad \left(\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq 2\pi\right)$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \sqrt{1-\sin t}\,dt \\ &= -\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\,dt + \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\,dt \\ &= -\sqrt{2}\left[-2\cos\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \sqrt{2}\left[-2\cos\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{x} \\ &= 2\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-1\right\} \\ &= -2\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right) + 4\sqrt{2} - 2 \end{aligned}$$

よって

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right) - 2 & \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2} \text{ のとき}\right) \\ -2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right) + 4\sqrt{2} - 2 & \left(\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq 2\pi \text{ のとき}\right) \end{cases}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3) $\sin t$ は周期 2π の周期関数であるから，$\sqrt{1-\sin t}$ も周期 2π の周期関数である．

$$\begin{aligned} \int_0^{2n\pi} \sqrt{1-\sin t}\,dt &= n\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\sin t}\,dt \\ &= nf(2\pi) \\ &= \boldsymbol{4\sqrt{2}n} \end{aligned} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$