a を実数とする．座標平面上の曲線 $C : y = e^x(x^2+2x)$ と直線 $l : y = a$ について，次の問いに答えよ．

(1) C と l がちょうど 2 点を共有するような a が満たす条件を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x(x^2+2x) = 0$ を用いてよい．

(2) (1) で求めた条件を満たす a に対し，C と l で囲まれる領域と，不等式 $x \leqq 0$ が表す領域との共通部分の面積を $S(a)$ とおく．$S(a)$ の最大値と，そのときの a の値を求めよ．

(18 信州大 理・医・工 5)

【答】

(1) $\dfrac{2-2\sqrt{2}}{e^{2-\sqrt{2}}} < a \leqq 0$ または $a = \dfrac{2+2\sqrt{2}}{e^{2+\sqrt{2}}}$

(2) $a = \dfrac{2+2\sqrt{2}}{e^{2+\sqrt{2}}}$，最大値 $\dfrac{14+10\sqrt{2}}{e^{2+\sqrt{2}}}$

【解答】

$$C : y = e^x(x^2+2x)$$
$$l : y = a$$

(1) $f(x) = e^x(x^2+2x)$ とおく．

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x(x^2+2x) + e^x(2x+2) \\ &= e^x(x^2+4x+2) \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ すなわち $x^2+4x+2=0$ の解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると

$$\alpha = -2-\sqrt{2},\ \beta = -2+\sqrt{2}$$

であり，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x(x^2+2x) = 0$ も用いると，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

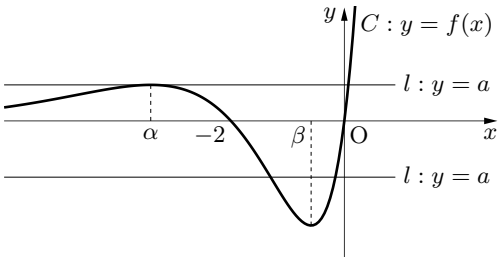
x	$(-\infty)$	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	(0)	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	(∞)

$x^2+4x+2=0$ を満たす x は $x^2+2x = -2x-2$ を満たすから

$$\text{極大値} : f(\alpha) = e^\alpha(\alpha^2+2\alpha) = e^\alpha(-2\alpha-2) = \frac{2+2\sqrt{2}}{e^{2+\sqrt{2}}}$$

$$\text{極小値} : f(\beta) = e^\beta(\beta^2+2\beta) = e^\beta(-2\beta-2) = \frac{2-2\sqrt{2}}{e^{2-\sqrt{2}}}$$

であり，曲線 C のグラフは次図の太線部分となる．



よって，C と l がちょうど 2 点を共有するための a の条件は

$$\boldsymbol{\frac{2-2\sqrt{2}}{e^{2-\sqrt{2}}} < a \leqq 0 \text{ または } a = \frac{2+2\sqrt{2}}{e^{2+\sqrt{2}}}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) (1) より，面積 $S(a)$ が最大となるときは

$$\boldsymbol{a = \frac{2+2\sqrt{2}}{e^{2+\sqrt{2}}}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

のときであり，面積 $S(a)$ の最大値は

$$\begin{aligned}
&\int_{\alpha}^{0} \{a - e^x(x^2+2x)\}\,dx \\
=&\int_{\alpha}^{0} \{a - (e^x x^2)'\}\,dx \\
=&\Big[ax - e^x x^2\Big]_{\alpha}^{0} \\
=&-a\alpha + e^{\alpha}\alpha^2 \\
=&-\alpha(a - e^{\alpha}\alpha) \\
=&(2+\sqrt{2})\left(\frac{2+2\sqrt{2}}{e^{2+\sqrt{2}}} + \frac{2+\sqrt{2}}{e^{2+\sqrt{2}}}\right) \\
=&\boldsymbol{\frac{14+10\sqrt{2}}{e^{2+\sqrt{2}}}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．