2 つの関数

$$f(x)=\cos x,\ g(x)=\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2}-\frac{\pi}{2}$$

がある．

(1) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，不等式 $\dfrac{2}{\pi}x \leqq \sin x$ が成り立つことを示せ．

(2) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，不等式 $g(x) \leqq f(x)$ が成り立つことを示せ．

(3) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲において，2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ および y 軸が囲む部分の面積を求めよ．

(18 北海道大 理 5)

【答】

(1) 略

(2) 略

(3) $1+\dfrac{\pi^2}{8}-\dfrac{\pi^3}{16}$

【解答】

(1) $h(x)=\sin x-\dfrac{2}{\pi}x\ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく．

$$h'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}$$

$0<\dfrac{2}{\pi}<1$ であるから $\cos x=\dfrac{2}{\pi}$ をみたす x が $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲にただ一つ存在する．これを α とすると，増減表は右のようになる．

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$h(0)=h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ にも注意すると，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき

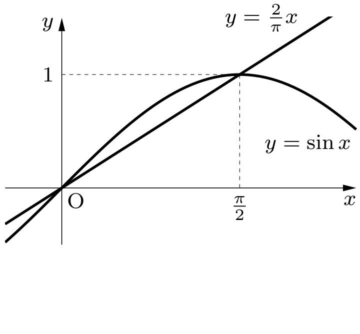
$$h(x) \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{2}{\pi}x \leqq \sin x$$

が成り立つ． ……(証明終わり)

- $y=\sin x$ のグラフは，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において上に凸であるから，2 点 $(0,\ 0)$，$\left(\dfrac{\pi}{2},\ 1\right)$ を通る直線 $y=\dfrac{2}{\pi}x$ の上下関係をみると，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\frac{2}{\pi}x \leqq \sin x$$

が成り立つことがわかる．



(2) $k(x) = f(x) - g(x) = \cos x - \sqrt{\dfrac{\pi^2}{2} - x^2} + \dfrac{\pi}{2}$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく．

$$\begin{aligned} k'(x) &= -\sin x + \frac{x}{\sqrt{\dfrac{\pi^2}{2} - x^2}} \\ &\leqq -\sin x + \frac{x}{\sqrt{\dfrac{\pi^2}{2} - \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2}} \\ &= -\sin x + \frac{2}{\pi}x \\ &\leqq 0 \quad (\because\ (1)) \end{aligned}$$

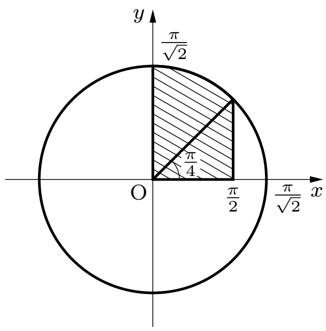
よって，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$k(x)$ は減少関数であり，$k\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ にも注意すると，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$k(x) \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad g(x) \leqq f(x)$$

が成り立つ．　……(証明終わり)

(3) (2) より，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲において $g(x) \leqq f(x)$ であるから，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x) - g(x)\}\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x - \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - x^2} + \frac{\pi}{2}\right) dx \\ &= \left[\sin x + \frac{\pi}{2}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &\quad - \left\{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right\} \\ &= 1 + \frac{\pi^2}{4} - \left(\frac{\pi^3}{16} + \frac{\pi^2}{8}\right) \\ &= \mathbf{1 + \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^3}{16}} \quad \text{……(答)} \end{aligned}$$



- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - x^2}\,dx$ は $x = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\sin\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と置換して求めることもできる．
- $y = f(x)$，$y = g(x)$ を図示すると下図なる．