2 つの関数

$$f(t) = 2\sin t + \cos 2t, \quad g(t) = 2\cos t + \sin 2t$$

を用いて定義される座標平面上の曲線

$$C : x = f(t), \quad y = g(t) \quad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

を考える．

(1) t が $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，$f(t)$ および $g(t)$ の最大値を求めよ．

(2) t_1，t_2 を $0 \leqq t_1 < t_2 \leqq \dfrac{\pi}{2}$ かつ $f(t_1) = f(t_2)$ を満たす実数とする．このとき，$g(t_1)^2 - g(t_2)^2 > 0$ が成り立つことを示せ．

(3) C と直線 $x = 1$ が囲む領域の面積 S を求めよ．

(18 大阪大 理系 3)

【答】

(1) $f(t)$ の最大値は $\dfrac{3}{2}$，$g(t)$ の最大値は $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

(2) 略

(3) $S = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{3}$

【解答】

$$C : \begin{cases} x = f(t) = 2\sin t + \cos 2t \\ y = g(t) = 2\cos t + \sin 2t \end{cases} \quad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

(1)

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2\cos t - 2\sin 2t \\ &= 2\cos t(1 - 2\sin t) \end{aligned}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	(0)
$f(t)$	1	↗		↘	1

増減表から $f(t)$ の最大値は

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{3}{2}} \quad \cdots\cdots(答)$$

また

$$\begin{aligned} g'(t) &= -2\sin t + 2\cos 2t \\ &= -2\sin t + 2(1 - 2\sin^2 t) \\ &= -2(2\sin^2 t + \sin t - 1) \\ &= -2(\sin t + 1)(2\sin t - 1) \end{aligned}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	(0)
$g(t)$	2	↗		↘	0

増減表から $g(t)$ の最大値は

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \quad \cdots\cdots(答)$$

(2) $f(t_1)=f(t_2)$ $\left(0 \leqq t_1 < t_2 \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき

$$
\begin{aligned}
&2\sin t_1+\cos 2t_1=2\sin t_2+\cos 2t_2\\
&2\sin t_1+(1-2\sin^2 t_1)=2\sin t_2+(1-2\sin^2 t_2)\\
&(\sin t_1-\sin t_2)-(\sin^2 t_1-\sin^2 t_2)=0\\
&(\sin t_1-\sin t_2)(1-\sin t_1-\sin t_2)=0
\end{aligned}
$$

$0 \leqq t_1 < t_2 \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $\sin t_1-\sin t_2 \fallingdotseq 0$ であり

$$\sin t_1+\sin t_2=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

次に

$$
\begin{aligned}
g(t)^2&=(2\cos t+\sin 2t)^2\\
&=4\cos^2 t(1+\sin t)^2\\
&=4(1-\sin^2 t)(1+2\sin t+\sin^2 t)\\
&=4(1+2\sin t-2\sin^3 t-\sin^4 t)
\end{aligned}
$$

であるから，$s_1=\sin t_1$，$s_2=\sin t_2$ とおくと

$$
\begin{aligned}
&\ g(t_1)^2-g(t_2)^2\\
=&4(1+2s_1-2{s_1}^3-{s_1}^4)-4(1+2s_2-2{s_2}^3-{s_2}^4)\\
=&4\{2(s_1-s_2)-2({s_1}^3-{s_2}^3)-({s_1}^4-{s_2}^4)\}\\
=&4(s_1-s_2)\{2-2({s_1}^2+s_1s_2+{s_2}^2)-(s_1+s_2)({s_1}^2+{s_2}^2)\}\\
=&4(s_1-s_2)\{2-2((s_1+s_2)^2-s_1s_2)-(s_1+s_2)((s_1+s_2)^2-2s_1s_2)\}\\
=&4(s_1-s_2)\{2-2(1-s_1s_2)-1\cdot(1-2s_1s_2)\} \quad (\because ①\text{より } s_1+s_2=1)\\
=&4(s_1-s_2)(4s_1s_2-1)
\end{aligned}
$$

$0 \leqq t_1 < t_2 \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より

$$s_1-s_2=\sin t_1-\sin t_2<0$$

また，$s_1>0$，$s_2>0$ $(s_1 \fallingdotseq s_2)$ より，相加平均・相乗平均の関係を用いると

$$
\begin{aligned}
4s_1s_2-1&<4\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right)^2-1 \quad (s_1 \fallingdotseq s_2\text{より等号は成り立たない})\\
&=4\left(\frac{1}{2}\right)^2-1\\
&=0
\end{aligned}
$$

であるから

$$g(t_1)^2-g(t_2)^2>0$$

が成り立つ．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　…… (証明終わり)

- 1 文字消去でもよい．
  $s_2=1-s_1$ より

$$
\begin{aligned}
g(t_1)^2-g(t_2)^2&=4(s_1-s_2)(4s_1s_2-1)\\
&=4(2s_1-1)(-4{s_1}^2+4s_1-1)\\
&=4(1-2s_1)^3
\end{aligned}
$$

(1) の増減表より，$f(t_1)=f(t_2)$ となる $t_1<t_2$ は $0\leqq t_1<\dfrac{\pi}{6}<t_2\leqq\dfrac{\pi}{2}$ を満たすから

$$0\leqq \sin t_1<\frac{1}{2}$$
$$0<1-2\sin t_1\leqq 1$$
$$0<1-2s_1\leqq 1$$

であり，$g(t_1)^2-g(t_2)^2>0$ が成り立つ．

(3) (1) の増減表から

$$g(t_1)>0,\ g(t_2)>0$$

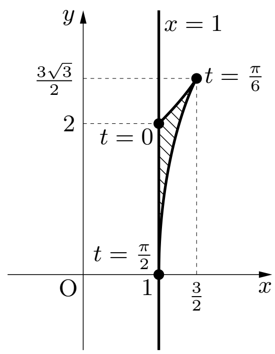
であり，(2) から

$$\{g(t_1)-g(t_2)\}\{g(t_1)+g(t_2)\}>0$$

でもあるから

$$g(t_1)>g(t_2)$$

である．(1) の増減表とあわせると，C と直線 $x=1$ が囲む領域は右図の斜線部分となる．



$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{6}$ のときの $y=g(t)$ を y_1，$\dfrac{\pi}{6}\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のときの $y=g(t)$ を y_2 とすると，曲線 C と直線 $x=1$ が囲む領域の面積 S は

$$\begin{aligned}
S&=\int_1^{\frac{3}{2}}y_1\,dx-\int_1^{\frac{3}{2}}y_2\,dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}y_1\frac{dx}{dt}\,dt-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}y_2\frac{dx}{dt}\,dt\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}y\frac{dx}{dt}\,dt\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(t)f'(t)\,dt\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos t+\sin 2t)(2\cos t-2\sin 2t)\,dt\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos^2 t-2\cos t\sin 2t-2\sin^2 2t)\,dt\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{2(1+\cos 2t)-4\cos^2 t\sin t-(1-\cos 4t)\}\,dt\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos 2t-4\cos^2 t\sin t+\cos 4t)\,dt\\
&=\left[t+\sin 2t+4\frac{\cos^3 t}{3}+\frac{\sin 4t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}}
\end{aligned}$$

……(答)