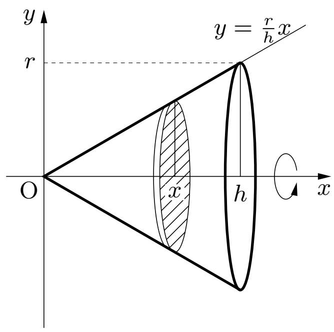
底面の半径が r，高さが h である円錐の体積 V は $\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ となることを積分を用いて証明せよ．

(18 奈良教大 4)

【答】 略

【解答】



円錐の頂点 O を原点，O から底面に下ろした垂線を x 軸とする座標を考える．

$0 \leqq x \leqq h$ とし，原点 O からの距離が x のところで底面と平行な平面で円錐を切る．その切り口の面積は

$$\pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2$$

であるから，円錐の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx \\ &= \pi\frac{r^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx \\ &= \pi\frac{r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h \\ &= \pi\frac{r^2}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3} \\ &= \frac{1}{3}\pi r^2 h \end{aligned}$$

である． …… (証明終わり)