$a,\ a,\ a,\ a,\ b,\ b,\ b,\ c,\ c,\ d$ の 10 文字を 1 列に並べる順列を考える．

(1) このような順列の総数を求めよ．

(2) 2 つの c が隣り合うような順列の総数を求めよ．

(3) c と d が隣り合わないような順列の総数を求めよ．

(18 信州大 後 経法・理・工・繊維 3)

【答】

(1) 12600
(2) 2520
(3) 7840

【解答】

(1) 同じものを含む順列であり，求める総数は

$$\frac{10!}{4!3!2!1!} = \mathbf{12600} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) 2 つの c を 1 つの文字 C とみなし並べると，求める総数は

$$\frac{9!}{4!3!1!1!} = \mathbf{2520} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(3) まず，d 以外の 9 文字を並べる．この並べ方は

$$\frac{9!}{4!3!2!} = 1260 \text{ 通り}$$

あり，これらのうち c が隣り合うものは

$$\frac{8!}{4!3!1!} = 280 \text{ 通り}$$

あり，c が隣り合わないものは

$$1260 - 280 = 980 \text{ 通り}$$

ある．

次に，この文字列のすき間または両端に d を入れると考える．

(i) c が隣り合うとき

d の入れ方は 7 通り (c の隣りは 3 か所) あるので，文字列は

$$280 \times 7 = 1960 \text{ 通り}$$

$$\begin{array}{c} a\ a\ b\ c\ c\ a\ b\ a\ b \\ \wedge\ \wedge\ \wedge\ \qquad\ \wedge\ \wedge\ \wedge\ \wedge \\ \uparrow \\ d \end{array}$$

(ii) c が隣り合わないとき

d の入れ方は 6 通り (c の隣りは 4 か所) あるので，文字列は

$$980 \times 6 = 5880 \text{ 通り}$$

$$\begin{array}{c} a\ a\ b\ c\ a\ c\ b\ a\ b \\ \wedge\ \wedge\ \wedge\ \qquad\ \wedge\ \wedge\ \wedge \\ \uparrow \\ d \end{array}$$

(i)，(ii) をあわせると，求める総数は

$$1960 + 5880 = \mathbf{7840} \qquad \cdots\cdots(答)$$

- すべての順列から $c,\ d$ が隣り合う順列を除くことを考える．

  (i) $c,\ c,\ d$ がすべて隣り合う場合

  $c,\ c,\ d$ の並び方は 3 通りあり，これを 1 つの文字とみなす．

$$3 \times \frac{8!}{4!3!1!} = 840 \text{ 通り}$$

(ii) $c,\ d$ が隣り合い，もう 1 つの c が隣り合わない場合

隣り合う $c,\ d$ の並びは 2 通りある．これをひとつの文字 C とみなし，$a,\ b$ の 7 文字による文字列のすき間または両端の 8 か所に 2 つの文字 $C,\ c$ を入れると考える．

$$2 \times \frac{7!}{4!3!} \times 8 \cdot 7 = 3920 \text{ 通り}$$

よって，求める総数は

$$12600 - (840 + 3920) = 7840$$

- c と d が隣り合う並びは $(c,\ d)$ または $(d,\ c)$ の 2 つがある．$(c,\ d,\ c)$ はどちらにも含まれることに注意すると

$$\begin{aligned} &12600 - \left(2 \times \frac{9!}{4!3!1!1!} - \frac{8!}{4!3!1!}\right) \\ =&12600 - (2 \times 2520 - 280) \\ =&7840 \end{aligned}$$