

$(a + 2a^{-1} - 1)^5$ を展開したとき、 a の係数は である。

(18 東京都市大)

【答】

105

【解答】

$(a + 2a^{-1} - 1)^5$ の展開式の一般項は

$$\frac{5!}{p!q!r!} \cdot a^p (2a^{-1})^q (-1)^r = \frac{5!}{p!q!r!} \cdot (-1)^r \cdot 2^q \cdot a^{p-q}$$

ただし、 p, q, r は 0 以上の整数で $p + q + r = 5$ を満たす。

ここで、 a の項が現れるのは $p - q = 1$ のときであり

$$\begin{cases} p - q = 1 \\ p + q + r = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} p = q + 1 \\ r = 4 - 2q \end{cases}$$

p, q, r は 0 以上の整数であるから

$$0 \leq q \leq 2$$

である。したがって

$$(p, q, r) = (1, 0, 4), (2, 1, 2), (3, 2, 0)$$

であり、 a の係数は

$$\frac{5!}{1!0!4!} \cdot (-1)^4 \cdot 2^0 + \frac{5!}{2!1!2!} \cdot (-1)^2 \cdot 2^1 + \frac{5!}{3!2!0!} \cdot (-1)^0 \cdot 2^2$$

$$= 5 + 60 + 40$$

$$= 105$$

……(答)