数字の 2 が書かれたカードが 2 枚，同様に，数字の 0, 1, 8 が書かれたカードがそれぞれ 2 枚，あわせて 8 枚のカードがある．これらから 4 枚を取り出し，横一列に並べてできる自然数を n とする．ただし，0 のカードが左から 1 枚または 2 枚現れる場合は，n は 3 桁または 2 桁の自然数とそれぞれ考える．例えば，左から順に 0, 0, 1, 1 の数字のカードが並ぶ場合の n は 11 である．

(1) a, b, c, d は整数とする．$1000a+100b+10c+d$ が 9 の倍数になることと $a+b+c+d$ が 9 の倍数になることは同値であることを示せ．

(2) n が 9 の倍数である確率を求めよ．

(3) n が偶数であったとき，n が 9 の倍数である確率を求めよ．

(18 北海道大 理 3)

【答】

(1) 略

(2) $\dfrac{9}{70}$

(3) $\dfrac{1}{7}$

【解答】

(1) $10 \equiv 1 \pmod 9$ より

$$\begin{aligned} &1000a+100b+10c+d \\ =&10^3a+10^2b+10c+d \\ \equiv& a+b+c+d \pmod 9 \end{aligned}$$

$1000a+100b+10c+d$ を 9 で割った余りと $a+b+c+d$ を 9 で割った余りは等しい．

したがって，$1000a+100b+10c+d$ が 9 の倍数になることと $a+b+c+d$ が 9 の倍数になることは同値である． ……(証明終わり)

(2) 8 枚のカードはすべて区別して考える．

このとき 4 枚を取り出して一列に並べる方法は

$$8\cdot7\cdot6\cdot5 \quad \text{通り}$$

あり，これらは同様に確からしい．

横一列に並べた数字を左から a, b, c, d とすると

$$n=1000a+100b+10c+d$$

であり，n が 9 の倍数あることは，(1) より $a+b+c+d$ が 9 の倍数であることである．

$$\begin{aligned} 0+0+1+1 \leqq a+b+c+d \leqq 2+2+8+8 \\ 2 \leqq a+b+c+d \leqq 20 \end{aligned}$$

より，$a+b+c+d$ が 9 の倍数になるのは

$$a+b+c+d=9 \text{ または } 18$$

のときであり，$\{a,\ b,\ c,\ d\}$ が

(ア) $\{0,\ 0,\ 1,\ 8\}$ $(0+0+1+8=9)$

(イ) $\{0,\ 2,\ 8,\ 8\}$ $(0+2+8+8=9\cdot2)$

(ウ) $\{1,\ 1,\ 8,\ 8\}$　$(1+1+8+8=9\cdot 2)$

のいずれかの場合に限られる．同じ数字のカードが 2 枚ずつあることに注意すると，並べ方の総数は

(ア) のとき，${}_2\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1\times 4!=4\times 4!$　(通り)
(イ) のとき，${}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_2\times 4!=4\times 4!$　(通り)
(ウ) のとき，${}_2\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_2\times 4!=1\times 4!$　(通り)

より，全部で

$$(4+4+1)\times 4!=9\times 24\quad \text{通り}$$

ある．求める確率は，

$$\frac{9\times 24}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}=\mathbf{\frac{9}{70}}$$ ……(答)

(3) $n=1000a+100b+10c+d$ が偶数あるのは，d が 0，2，8 のいずれかであり

$${}_6\mathrm{C}_1\cdot 7\cdot 6\cdot 5=7\cdot 6^2\cdot 5\quad \text{通り}$$

ある．これらは同様に確からしい．

(ア) で偶数になっているものは，${}_2\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1\times 3\cdot 3!=4\times 18=72$　(通り)
(イ) で偶数になっているものは，${}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_2\times 4!=4\times 24=96$　(通り)
(ウ) で偶数になっているものは，${}_2\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_2\times 2\cdot 3!=1\times 12=12$　(通り)

求める確率は

$$\frac{72+96+12}{7\cdot 6^2\cdot 5}=\frac{180}{7\cdot 6^2\cdot 5}=\mathbf{\frac{1}{7}}$$ ……(答)