3 本の当たりくじを含む 10 本のくじがある．最初に 1 本引き，もとに戻さないで次に 1 本引くとき，2 本とも当たる確率を求めよ．

(18 秋田大 理工・教文・国資 1(2))

【答】 $\dfrac{1}{15}$

【解答】

3 本の当たりくじを含む 10 本のくじを，すべて区別して考える．

このとき，10 本のくじからもとに戻さずに続けて，くじ 2 本を引く場合の数は全部で ${}_{10}\mathrm{P}_2$ 通りあり，これらの起こり方は同様に確からしい．このうち 2 本とも当たる場合の数は ${}_{3}\mathrm{P}_2$ 通りある．

よって，求める確率は

$$\frac{{}_{3}\mathrm{P}_2}{{}_{10}\mathrm{P}_2} = \frac{3 \cdot 2}{10 \cdot 9} = \boldsymbol{\frac{1}{15}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(別解 1) 乗法定理を用いる．

k 回目 $(1 \leqq k \leqq 10)$ に当たりくじを引くという事象を A_k とすると，求める確率は

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P_{A_1}(A_2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$$

(別解 2) 10 本のくじすべてを横一列に並べたときの，左から 1 番目，2 番目に着目する．

10 本のくじすべて区別して考えると，10 本のくじの並べ方は 10! 通りあり，これらの起こり方は同様に確からしい．このうち，左から 1 番目，2 番目に当たりが並ぶのは $3 \cdot 2 \cdot 8!$ 通りあるから，求める確率は

$$\frac{3 \cdot 2 \cdot 8!}{10!} = \frac{1}{15}$$

- 10 本のくじを並べる (別解 2) は，2 本のくじを並べる【解答】の解法 (確率の定義に基づく解法) と比べると余分な計算をしていうように思えるかもしれない．

  問題を「2 本目に当たりくじを引く確率を求めよ.」にかえると違いが見えてくるだろう．それぞれの考え方で解くと次のようになる．

  - 【解答】型：$\dfrac{3 \cdot 2 + 7 \cdot 3}{{}_{10}\mathrm{P}_2} = \dfrac{27}{10 \cdot 9} = \dfrac{3}{10}$
  - (別解 1) 型：$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_1 \cap A_2) + P(\overline{A_1} \cap A_2) \\ &= P(A_1)P_{A_1}(A_2) + P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(A_2) \\ &= \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{3}{10} \end{aligned}$$
  - (別解 2) 型：2 番目のくじを決めてから，1 番目，3 番目以降のくじを決めていくと考えると $\dfrac{3 \cdot 9!}{10!} = \dfrac{3}{10}$

  (注) (別解 2) の考え方を用いると，k 回目に当たりくじを引く確率は，つねに $\dfrac{3}{10}$ であることもすぐに分かる．すなわち，当たりくじを引く確率は何回目に引いても変わらない,「くじ引きは公平」である．