袋の中に赤玉 4 個，白玉 3 個，青玉 2 個が入っている．袋の中から玉を 1 個ずつ取り出し，どの色の玉も 1 個以上取り出された時点で取り出すのを終了する．次の各問に答えよ．ただし，取り出した玉は，もとに戻さないものとする．

(1) 3 個目を取り出して終了する確率を求めよ．
(2) 8 個目を取り出して終了する確率を求めよ．
(3) 7 個目を取り出して終了したとき，袋の中に白玉が残っていない確率を求めよ．

(18 茨城大 教育 4)

【答】

(1) $\dfrac{2}{7}$

(2) $\dfrac{1}{36}$

(3) $\dfrac{8}{17}$

【解答】

(1) 赤白青の 9 個の玉をすべて区別して 1 列に並べるものとする．
　3 個目を取り出して終了するのは，左から 3 番目までに，赤白青が並んでいることである．3 番目までの各色の玉の選び方は $4 \cdot 3 \cdot 2$ 通りあり，色の順序は $3!$ 通りある．残り 6 個の玉の並び方は $6!$ 通りあるから，求める確率は

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \times 3! \times 6!}{9!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \times 3!}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \boldsymbol{\frac{2}{7}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

- 3 個目を取り出して終了するのは，3 個目までに赤白青を取り出すときであり，取り出す色の順序は
$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \ (\text{通り})$$
ある．この 6 通りの確率はそれぞれ次の通りである．
赤白青：$\dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{2}{7}$
赤青白：$\dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{2}{8} \cdot \dfrac{3}{7}$
白赤青：$\dfrac{3}{9} \cdot \dfrac{4}{8} \cdot \dfrac{2}{7}$
白青赤：$\dfrac{3}{9} \cdot \dfrac{2}{8} \cdot \dfrac{4}{7}$
青赤白：$\dfrac{2}{9} \cdot \dfrac{4}{8} \cdot \dfrac{3}{7}$
青白赤：$\dfrac{2}{9} \cdot \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{4}{7}$
これらの確率はすべて等しく $\dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{2}{7}$ である．よって，求める確率は
$$6 \times \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{7}$$
- 【解答】の方針で最初の 3 個に着目して計算してもよい．
　9 個の異なる玉から 3 個の玉を取り出して 1 列に並べる場合の数は ${}_9\mathrm{P}_3 = 9 \cdot 8 \cdot 7$ 通りである．

このうち赤白青を取り出すのは，取り出す玉の選び方が $4\cdot3\cdot2$ 通り，取り出す順序が $3!$ 通りあるから，求める確率は

$$\frac{4\cdot3\cdot2\times3!}{9\cdot8\cdot7}=\frac{2}{7}$$

(2) 8 個目を取り出して終了するのは，7 個目まで取り出す玉の色は 2 色であり，8 個目に残りの色を取り出すときである．

7 個目までに取り出す玉は赤 4 個と白 3 個に限られるから，求める確率は

$$\frac{7!\times2!}{9!}=\frac{2}{9\cdot8}=\boldsymbol{\frac{1}{36}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

- 8 個目を取り出して終了するのは，7 個目までに赤 4 個と白 3 個を取り出し，8 個目は青を取り出すときであるから

$$\begin{aligned}&{}_7\mathrm{C}_4\left(\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\right)\times\frac{2}{2}\\ =&\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{1}{3\cdot7\cdot6}\cdot\frac{1}{5\cdot2}\times1=\frac{1}{36}\end{aligned}$$

- 8 個目を取り出して終了するのは，7 個目までに赤 4 個と白 3 個を取り出すときであるから，最初の 7 個に着目すると

$$\frac{7!}{{}_9\mathrm{P}_7}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}=\frac{2\cdot1}{9\cdot8}=\frac{1}{36}$$

- 8 個目を取り出して終了するのは，7 個目までに赤 4 個と白 3 個を取り出すときであり，この取り出し方は 1 通りである．求める確率は

$$\frac{1}{{}_9\mathrm{C}_7}=\frac{1}{\dfrac{9\cdot8}{2\cdot1}}=\frac{1}{36}$$

(3) 7 個目を取り出して終了するのは，6 個目まで取り出す玉の色は 2 色であり，7 個目に残りの色を取り出すときであり

(i) 6 回目までに赤 3 個白 3 個をとり，7 個目は残り赤 1 個青 2 個から青を取る．
(ii) 6 回目までに赤 4 個白 2 個をとり，7 個目は残り白 1 個青 2 個から青を取る．
(iii) 6 回目までに赤 4 個青 2 個をとり，7 個目は残り白 3 個から白を取る．

のいずれかである．

7 個目を取り出して試行が終了するという事象を E，袋の中に白玉が残っていないという事象を W とおくと，求める確率は

$$P_E(W)=\frac{P(E\cap W)}{P(E)}$$

である．(i)，(ii)，(iii) の確率をそれぞれ p_1，p_2，p_3 とおくと

$$\begin{aligned}p_1&=\frac{{}_4\mathrm{C}_3\cdot{}_3\mathrm{C}_3\cdot6!\times{}_2\mathrm{C}_1\times2!}{9!}=\frac{4\cdot1\times2\times2}{9\cdot8\cdot7}=\frac{2}{63}\\ p_2&=\frac{{}_4\mathrm{C}_4\cdot{}_3\mathrm{C}_2\cdot6!\times{}_2\mathrm{C}_1\times2!}{9!}=\frac{1\cdot3\times2\times2}{9\cdot8\cdot7}=\frac{1}{42}\\ p_3&=\frac{{}_4\mathrm{C}_4\cdot{}_2\mathrm{C}_2\cdot6!\times{}_3\mathrm{C}_1\times2!}{9!}=\frac{1\cdot1\times3\times2}{9\cdot8\cdot7}=\frac{1}{84}\end{aligned}$$

であり，終了時に白が残っていないのは (i) のときである．

求める確率は

$$P_E(W) = \frac{p_1}{p_1+p_2+p_3} = \frac{\dfrac{2}{63}}{\dfrac{2}{63}+\dfrac{1}{42}+\dfrac{1}{84}}$$

$$= \frac{\dfrac{8}{21\cdot 3\cdot 4}}{\dfrac{8}{21\cdot 3\cdot 4}+\dfrac{6}{21\cdot 2\cdot 6}+\dfrac{3}{21\cdot 4\cdot 3}}$$

$$= \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{17}}$$

……(答)

- 条件付き確率の定義にしたがい，7 個目までの順列を考えてもよい．
  (i)，(ii)，(iii) が起こる場合に数を数えると

$$P_E(W) = \frac{{}_4\mathrm{C}_3\cdot{}_3\mathrm{C}_3\cdot 6!\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_3\cdot{}_3\mathrm{C}_3\cdot 6!\times{}_2\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_4\cdot{}_3\mathrm{C}_2\cdot 6!\times{}_2\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_4\cdot{}_2\mathrm{C}_2\cdot 6!\times{}_3\mathrm{C}_1}$$

$$= \frac{4\cdot 1\times 2}{4\cdot 1\times 2+1\cdot 3\times 2+1\cdot 1\times 3}$$

$$= \frac{8}{8+6+3}$$

$$= \frac{8}{17}$$