1 から 20 までの整数が 1 つずつ書かれた 20 枚のカードが箱の中にある．この箱の中から A，B，C の 3 人が順に 1 枚ずつ 1 回だけカードを取り出す．ただし，取り出したカードは箱にもどさないものとする．

(1) 取り出した 3 枚のカードの数字について，その和が 10 以下，かつ 2 枚以上が素数である確率を求めよ．
(2) 取り出した 3 枚のカードの数字について，その和が 10 以下，または 2 枚以上が素数である確率を求めよ．
(3) 取り出した 3 枚のカードの数字について，その和が 10 以下，または 2 枚以上が素数であったとき，B のカードの数字が素数である確率を求めよ．

(18 青森公立大 4)

【答】

(1) $\dfrac{1}{190}$

(2) $\dfrac{397}{1140}$

(3) $\dfrac{845}{1191}$

【解答】

(1) 取り出した 3 枚のカードの数字について，その和が 10 以下である事象を S，2 枚以上が素数である事象を T とおく．

3 つの数字の和が 10 以下となるカードの組み合わせは

$\{1,\ 2,\ 3\}$，$\{1,\ 2,\ 4\}$，$\{1,\ 2,\ 5\}$，$\{1,\ 2,\ 6\}$，$\{1,\ 2,\ 7\}$，
$\{1,\ 3,\ 4\}$，$\{1,\ 3,\ 5\}$，$\{1,\ 3,\ 6\}$，
$\{1,\ 4,\ 5\}$，
$\{2,\ 3,\ 4\}$，$\{2,\ 3,\ 5\}$

の 11 通りであり，この中で素数を 2 つ以上含む組は

$$\{1,\ 2,\ 3\},\ \{1,\ 2,\ 5\},\ \{1,\ 2,\ 7\},\ \{1,\ 3,\ 5\},\ \{2,\ 3,\ 4\},\ \{2,\ 3,\ 5\}$$

の 6 組がある．

カードを取り出す順序も考えると，求める確率 $P(S\cap T)$ は

$$P(S\cap T)=\frac{6\times 3!}{20\cdot 19\cdot 18}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{190}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 求める確率 $P(S\cup T)$ は

$$P(S\cup T)=P(S)+P(T)-P(S\cap T)$$

である．ここで

$$P(S)=\frac{11\times 3!}{20\cdot 19\cdot 18}=\frac{11}{20\cdot 19\cdot 3}$$

である．

20 枚のカードのうち素数が書かれたカードは

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19$$

の 8 枚ある．「素数 3 枚」の組み合わせは ${}_8\mathrm{C}_3$ 組,「素数 2 枚と素数でないもの 1 枚」の組み合せは ${}_8\mathrm{C}_2\cdot{}_{12}\mathrm{C}_1$ 組ある．カードを取り出す順序も考えると

$$P(T)=\frac{{}_8\mathrm{C}_3\times 3!+{}_8\mathrm{C}_2\cdot{}_{12}\mathrm{C}_1\times 3!}{20\cdot 19\cdot 18}=\frac{\dfrac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}+\dfrac{8\cdot 7}{2\cdot 1}\cdot 12}{20\cdot 19\cdot 3}=\frac{8\cdot 7\cdot 7}{20\cdot 19\cdot 3}$$

よって

$$P(S\cup T)=\frac{11}{20\cdot 19\cdot 3}+\frac{8\cdot 7\cdot 7}{20\cdot 19\cdot 3}-\frac{6}{20\cdot 19\cdot 3}$$
$$=\frac{397}{20\cdot 19\cdot 3}=\boldsymbol{\frac{397}{1140}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) B のカードの数字が素数である事象を U とおくと，求める確率は

$$P_{S\cup T}(U)=\frac{P((S\cup T)\cap U)}{P(S\cup T)}$$

である．

素数の枚数で場合分けすると，$(S\cup T)\cap U$ が起こるのは

(i) 素数が 2 枚以上のとき，$(S\cup T)\cap U=T\cap U$ であるから，素数が 2 枚以上かつ B が素数を取り出す

(ii) 素数が 1 枚のとき，$(S\cup T)\cap U=S\cap U$ であるから，和が 10 以下かつ B だけが素数を取り出す

の 2 通りがあり，これらは排反である．

(i) は「素数 3 枚」のときと「素数 2 枚と素数でないもの 1 枚」のときがあり，

素数 3 枚のときは全員が素数を取り出し，
素数 2 枚と素数でないもの 1 枚のときは「A と B」または「B と C」が素数を取り出す．

(ii) となる組み合わせは

$$\{1,\ 2,\ 4\},\ \{1,\ 2,\ 6\},\ \{1,\ 3,\ 4\},\ \{1,\ 3,\ 6\},\ \{1,\ 4,\ 5\}$$

のいずれかである．カードの取り出す順序も考えると

$$\begin{aligned}
P((S\cup T)\cap U)&=P(T\cap U)+P(S\cap U)\\
&=\frac{{}_8\mathrm{C}_3\times 3!+{}_8\mathrm{C}_2\cdot{}_{12}\mathrm{C}_1\times(2+2)}{20\cdot 19\cdot 18}+\frac{{}_5\mathrm{C}_1\times 2}{20\cdot 19\cdot 18}\\
&=\frac{\dfrac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}\times 3+\dfrac{8\cdot 7}{2\cdot 1}\cdot 12\times 2}{20\cdot 19\cdot 9}+\frac{5}{20\cdot 19\cdot 9}\\
&=\frac{8\cdot 7(3+12)+5}{20\cdot 19\cdot 9}\\
&=\frac{845}{20\cdot 19\cdot 9}\\
&=\frac{169}{4\cdot 19\cdot 9}
\end{aligned}$$

である．

よって，求める確率は

$$P_{S\cup T}(U)=\frac{\dfrac{169}{4\cdot 19\cdot 9}}{\dfrac{397}{20\cdot 19\cdot 3}}=\frac{169\cdot 5}{397\cdot 3}=\boldsymbol{\frac{845}{1191}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．