1 座標空間の４点 $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$，$B(0,\ 0,\ 1)$，
$C\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ -1\right)$，$D\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ -1\right)$に対し，

$$\vec{p}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{OB},\quad \vec{q}=(1-s)\overrightarrow{OC}+s\,\overrightarrow{OD}$$

とおく。ただし，O は原点，s と t は実数とする。

(1) $|\vec{p}|$，$|\vec{q}|$ と内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ を s，t で表せ。

(2) $t=\frac{1}{2}$ のとき，ベクトル $\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角が $\frac{3}{4}\pi$ となるような s の値を求めよ。

(3) s と t が実数を動くとき，$|\vec{p}-\vec{q}|$ の最小値を求めよ。

2 $z+\frac{4}{z}$ が実数となるような０と異なる複素数 z の全体を D とする。

(1) D を複素数平面上に図示せよ。

(2) k を実数とする。D に属する z で方程式

$$k\left(z+\frac{4}{z}+8\right)=i\left(z-\frac{4}{z}\right)$$

を満たすものが存在するような k の値の範囲を求めよ。ただし，i は虚数単位を表す。

3 数字の 2 が書かれたカードが 2 枚，同様に，数字の 0，1，8 が書かれたカードがそれぞれ 2 枚，あわせて 8 枚のカードがある。これらから 4 枚を取り出し，横一列に並べてできる自然数を n とする。ただし，0 のカードが左から 1 枚または 2 枚現れる場合は，n は 3 桁または 2 桁の自然数とそれぞれ考える。例えば，左から順に 0，0，1，1 の数字のカードが並ぶ場合の n は 11 である。

(1) a，b，c，d は整数とする。$1000a + 100b + 10c + d$ が 9 の倍数になることと $a + b + c + d$ が 9 の倍数になることは同値であることを示せ。

(2) n が 9 の倍数である確率を求めよ。

(3) n が偶数であったとき，n が 9 の倍数である確率を求めよ。

4 座標平面上に 3 点 $\mathrm{O}(0, 0)$，$\mathrm{A}\left(\frac{15}{2}, 0\right)$，$\mathrm{B}(11, 11)$ がある。条件

$$\mathrm{BQ} \geqq \mathrm{OQ} \geqq 2\,\mathrm{AQ}$$

を満たす点 $\mathrm{Q}(x, y)$ の全体を D とする。

(1) D を座標平面上に図示せよ。また，$\mathrm{BQ} = \mathrm{OQ} = 2\,\mathrm{AQ}$ となるすべての点 Q の座標を求めよ。

(2) $0 < p \leqq 11$ とし，P を点 $(p, 11)$ とする。条件 $\mathrm{OQ} \geqq \mathrm{PQ}$ を満たす D の点 Q が存在するような p の値の範囲を求めよ。

5 2 つの関数

$$f(x) = \cos x,\quad g(x) = \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - x^2} - \frac{\pi}{2}$$

がある。

(1) $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき，不等式 $\frac{2}{\pi}x \leqq \sin x$ が成り立つことを示せ。

(2) $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき，不等式 $g(x) \leqq f(x)$ が成り立つことを示せ。

(3) $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲において，2 つの曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ および y 軸が囲む部分の面積を求めよ。