方程式

$$4^x - 3 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^{-x} + 4^{-x} = 0$$

について，次の問いに答えなさい．

(1) $X = 2^x - 2^{-x}$ とおくとき，上の方程式を X の式で表しなさい．
(2) 上の方程式の実数解 x をすべて求めなさい．

(18 信州大 教育 1)

【答】
(1) $X^2 - 3X + 2 = 0$
(2) $x = -1 + \log_2(1 + \sqrt{5})$，$\log_2(1 + \sqrt{2})$

【解答】

$$4^x - 3 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^{-x} + 4^{-x} = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) $X = 2^x - 2^{-x}$ とおくと

$$X^2 = 4^x + 4^{-x} - 2$$

であるから，方程式 ① は

$$(4^x + 4^{-x}) - 3(2^x - 2^x) = 0$$
$$(X^2 + 2) - 3X = 0$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{X^2 - 3X + 2 = 0} \qquad \cdots\cdots ② \qquad \cdots\cdots(答)$$

と表される．

(2) ② の解は

$$(X - 1)(X - 2) = 0 \qquad \therefore \quad X = 1,\ 2$$

であるから

$$① \iff 2^x - 2^{-x} = 1 \text{ または } 2^x - 2^{-x} = 2$$

$2^x > 0$ に注意すると

$$2^x - 2^{-x} = 1 \iff (2^x)^2 - 2^x - 1 = 0$$
$$\therefore \quad 2^x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \qquad \therefore \quad x = \log_2 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \log_2(1 + \sqrt{5}) - 1$$

また

$$2^x - 2^{-x} = 2 \iff (2^x)^2 - 2(2^x) - 1 = 0$$
$$\therefore \quad 2^x = 1 + \sqrt{2} \qquad \therefore \quad x = \log_2(1 + \sqrt{2})$$

よって，① の実数解は

$$\boldsymbol{x = -1 + \log_2(1 + \sqrt{5}),\ \log_2(1 + \sqrt{2})} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．