

関数 $f(x) = 9^x + 9^{-x} - k(3^x + 3^{-x}) + 4$ について、以下の間に答えよ。ただし、 k は定数とする。

- (1) $t = 3^x + 3^{-x}$ とおくと、 $9^x + 9^{-x}$ を t を用いて表せ。
- (2) $t = 3^x + 3^{-x}$ とおくと、 $f(x)$ を t を用いて表せ。また、 t のとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) $k = -6$ のとき、 $f(x)$ の最小値を求めよ。
- (4) $k = 6$ のとき、 $f(x)$ の最小値を求めよ。
- (5) $f(x)$ の最小値を k を用いて表せ。

(18 北海道医療大 歯・薬 2)

【答】

- (1) $9^x + 9^{-x} = t^2 - 2$
- (2) $f(x) = t^2 - kt + 2, t \geq 2$
- (3) 18
- (4) -7
- (5)
$$\begin{cases} 6 - 2k & (k \leq 4 \text{ のとき}) \\ 2 - \frac{k^2}{4} & (k \geq 4 \text{ のとき}) \end{cases}$$

【解答】

$$f(x) = 9^x + 9^{-x} - k(3^x + 3^{-x}) + 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

- (1) $t = 3^x + 3^{-x}$ の辺々を 2 乗して

$$t^2 = (3^x + 3^{-x})^2 = 9^x + 9^{-x} + 2$$

よって $9^x + 9^{-x} = t^2 - 2 \quad \cdots \cdots (\text{答})$

- (2) (1) より、 $\textcircled{1}$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= (t^2 - 2) - kt + 4 \\ &= t^2 - kt + 2 \end{aligned} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

また

$$t = 3^x + 3^{-x} \iff (3^x)^2 - t3^x + 1 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$X = 3^x$ とおくと

$$\textcircled{2} \iff X^2 - tX + 1 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}'$$

である。 t のとりうる値の範囲は $\textcircled{2}$ を満たす実数 x が存在するような t の集合であり、これは $\textcircled{2}'$ を満たす正の実数 X が存在するような t の集合である。

$\textcircled{2}'$ が正の実数解をもつ条件は、(2 解の積) $= 1 > 0$ であることに注意すると

$$\begin{cases} (\text{判別式}) \geq 0 \\ (2 \text{ 解の和}) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t^2 - 4 \geq 0 \\ t > 0 \end{cases}$$

$$\therefore t \geq 2$$

である。すなわち、 t のとり得る値の範囲は「2 以上のすべての実数」である。 $\cdots \cdots (\text{答})$

- $t = 3^x + 3^{-x}$ を x で微分 (数学 III) して、増減を調べ、 $t \geq 2$ を示してもよい。

- $3^x > 0, 3^{-x} > 0$ だから、相加平均・相乗平均の関係から

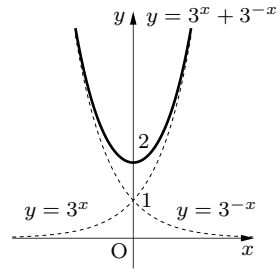
$$t = 3^x + 3^{-x} \geq 2\sqrt{3^x \cdot 3^{-x}} = 2 \quad \therefore t \geq 2$$

等号が成り立つのは

$$3^x = 3^{-x} \quad \therefore x = -x \quad \therefore x = 0$$

のときである。したがって、 t の最小値は 2 である。

この解法では「 t がどの範囲を動くか」はまだ示されていない。 t の動く範囲を示すには、 $t = 3^x$ と $t = 3^{-x}$ のグラフを加え合わせると、右図となるから t は 2 以上のすべての実数を動くといった説明を加えなければならない。



- (3) $k = -6$ のとき

$$f(x) = t^2 + 6t + 2 = (t + 3)^2 - 7$$

$t \geq 2$ だから $t = 2$ で最小となり

$$\text{最小値は } (2 + 3)^2 - 7 = 18$$

……(答)

- (4) $k = 6$ のとき

$$f(x) = t^2 - 6t + 2 = (t - 3)^2 - 7$$

$t \geq 2$ だから $t = 3$ で最小となり

$$\text{最小値は } -7$$

……(答)

- (5) $g(t) = t^2 - kt + 2$ とおく。

$$g(t) = \left(t - \frac{k}{2}\right)^2 + 2 - \frac{k^2}{4}$$

- (i) $\frac{k}{2} \leq 2$ ($k \leq 4$) のとき

$t = 2$ で最小となり、 $f(x)$ の最小値は

$$g(2) = 6 - 2k$$

- (ii) $\frac{k}{2} \geq 2$ ($k \geq 4$) のとき

$t = \frac{k}{2}$ で最小となり、 $f(x)$ の最小値は

$$g\left(\frac{k}{2}\right) = 2 - \frac{k^2}{4}$$

よって、 $f(x)$ の最小値は

$$\begin{cases} 6 - 2k & (k \leq 4 \text{ のとき}) \\ 2 - \frac{k^2}{4} & (k \geq 4 \text{ のとき}) \end{cases}$$

……(答)

である。