関数 $f(x) = 9^x + 9^{-x} - k(3^x + 3^{-x}) + 4$ について，以下の問に答えよ．ただし，k は定数とする．

(1) $t = 3^x + 3^{-x}$ とおくとき，$9^x + 9^{-x}$ を t を用いて表せ．
(2) $t = 3^x + 3^{-x}$ とおくとき，$f(x)$ を t を用いて表せ．また，t のとりうる値の範囲を求めよ．
(3) $k = -6$ のとき，$f(x)$ の最小値を求めよ．
(4) $k = 6$ のとき，$f(x)$ の最小値を求めよ．
(5) $f(x)$ の最小値を k を用いて表せ．

(18 北海道医療大 歯・薬 2)

【答】
(1) $9^x + 9^{-x} = t^2 - 2$
(2) $f(x) = t^2 - kt + 2$，$t \geqq 2$
(3) 18
(4) -7
(5) $\begin{cases} 6 - 2k & (k \leqq 4 \text{ のとき}) \\ 2 - \dfrac{k^2}{4} & (k \geqq 4 \text{ のとき}) \end{cases}$

【解答】

$$f(x) = 9^x + 9^{-x} - k(3^x + 3^{-x}) + 4 \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) $t = 3^x + 3^{-x}$ の辺々を 2 乗して

$$t^2 = (3^x + 3^{-x})^2 = 9^x + 9^{-x} + 2$$

よって　$9^x + 9^{-x} = \boldsymbol{t^2 - 2}$ ……(答)

(2) (1) より，①は

$$\begin{aligned} f(x) &= (t^2 - 2) - kt + 4 \\ &= \boldsymbol{t^2 - kt + 2} \end{aligned}$$ ……(答)

また

$$t = 3^x + 3^{-x} \iff (3^x)^2 - t3^x + 1 = 0 \qquad \cdots\cdots ②$$

$X = 3^x$ とおくと

$$② \iff X^2 - tX + 1 = 0 \qquad \cdots\cdots ②'$$

である．t のとりうる値の範囲は ② を満たす実数 x が存在するような t の集合であり，これは ②$'$ を満たす正の実数 X が存在するような t の集合である．

②$'$ が正の実数解をもつ条件は，(2 解の積) $= 1 > 0$ であることに注意すると

$$\begin{cases} (\text{判別式}) \geqq 0 \\ (2\text{ 解の和}) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t^2 - 4 \geqq 0 \\ t > 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad t \geqq 2$$

である．すなわち，t のとり得る値の範囲は「**2 以上のすべての実数**」である． ……(答)

- $t = 3^x + 3^{-x}$ を x で微分 (数学 III) して，増減を調べ，$x \geqq 2$ を示してもよい．

- $3^x > 0,\ 3^{-x} > 0$ だから，相加平均・相乗平均の関係から

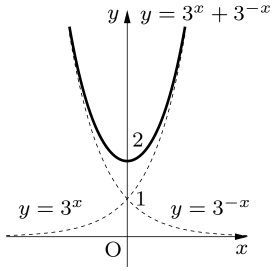
$$t = 3^x + 3^{-x} \geqq 2\sqrt{3^x \cdot 3^{-x}} = 2 \qquad \therefore \quad t \geqq 2$$

等号が成り立つのは

$$3^x = 3^{-x} \qquad \therefore \quad x = -x \qquad \therefore \quad x = 0$$

のときである．したがって，t の最小値は 2 である．

この解法では「t がどの範囲を動くか」はまだ示されていない．t の動く範囲を示すには，$t = 3^x$ と $t = 3^{-x}$ のグラフを加え合わせると，右図となるから t は 2 以上のすべての実数を動くといった説明を加えなければならない．



(3) $k = -6$ のとき

$$f(x) = t^2 + 6t + 2 = (t+3)^2 - 7$$

$t \geqq 2$ だから $t = 2$ で最小となり

最小値は　$(2+3)^2 - 7 = \mathbf{18}$ ……(答)

(4) $k = 6$ のとき

$$f(x) = t^2 - 6t + 2 = (t-3)^2 - 7$$

$t \geqq 2$ だから $t = 3$ で最小となり

最小値は　$\mathbf{-7}$ ……(答)

(5) $g(t) = t^2 - kt + 2$ とおく．

$$g(t) = \left(t - \frac{k}{2}\right)^2 + 2 - \frac{k^2}{4}$$

(i) $\dfrac{k}{2} \leqq 2\ (k \leqq 4)$ のとき

$t = 2$ で最小となり，$f(x)$ の最小値は

$$g(2) = 6 - 2k$$

(ii) $\dfrac{k}{2} \geqq 2\ (k \geqq 4)$ のとき

$t = \dfrac{k}{2}$ で最小となり，$f(x)$ の最小値は

$$g\left(\frac{k}{2}\right) = 2 - \frac{k^2}{4}$$

よって，$f(x)$ の最小値は

$$\begin{cases} \mathbf{6 - 2k} & (\boldsymbol{k \leqq 4} \text{ のとき}) \\ \mathbf{2 - \dfrac{k^2}{4}} & (\boldsymbol{k \geqq 4} \text{ のとき}) \end{cases}$$ ……(答)

である．