次の 6 つの数

$$(\sqrt{10}-\sqrt{3})^{\frac{1}{3}},\ \log_{\sqrt{3}}\frac{7}{4},\ \frac{7}{9},\ \log_7 5,\ \frac{1}{\log_6 12},\ \log_{(\sqrt{15}-\sqrt{10})}12$$

について以下の各問いに答えよ．

(1) 6 つの数のうち負の数が 1 つだけある．負の数を答えよ．
(2) 6 つの数のうち 1 以上の数が 2 つある．1 以上の数を答えよ．
(3) 6 つの数のうち (1) と (2) 以外の数を左から小さい順に並べよ．

(18 昭和大 歯・薬・保 5)

【答】

(1) $\log_{(\sqrt{15}-\sqrt{10})}12$

(2) $(\sqrt{10}-\sqrt{3})^{\frac{1}{3}},\ \log_{\sqrt{3}}\frac{7}{4}$

(3) $\dfrac{1}{\log_6 12}<\dfrac{7}{9}<\log_7 5$

【解答】

(1)
$$0<\sqrt{15}-\sqrt{10}<\sqrt{16}-\sqrt{9}=4-3=1$$

であるから，$\log_{(\sqrt{15}-\sqrt{10})}x$ は単調減少である．

$$\log_{(\sqrt{15}-\sqrt{10})}12<\log_{(\sqrt{15}-\sqrt{10})}1=0$$

より，負の数は　$\boldsymbol{\log_{(\sqrt{15}-\sqrt{10})}12}$　である．　……(答)

(2) $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ は単調増加な関数であり

$$(\sqrt{10}-\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}>(\sqrt{9}-\sqrt{4})^{\frac{1}{3}}=(3-2)^{\frac{1}{3}}=1$$

また，底の変換公式より

$$\begin{aligned}\log_{\sqrt{3}}\frac{7}{4}&=\frac{\log_3\frac{7}{4}}{\log_3\sqrt{3}}=\frac{\log_3\frac{7}{4}}{\frac{1}{2}}=2\log_3\frac{7}{4}=\log_3\left(\frac{7}{4}\right)^2=\log_3\frac{49}{16}\\&>\log_3\frac{48}{16}\quad(\because\ \log_3 x\text{ は単調増加な関数})\\&=\log_3 3=1\end{aligned}$$

よって，1 以上の 2 つの数は

$$\boldsymbol{(\sqrt{10}-\sqrt{3})^{\frac{1}{3}},\ \log_{\sqrt{3}}\frac{7}{4}}$$ ……(答)

(3) $\dfrac{7}{9},\ \log_7 5,\ \dfrac{1}{\log_6 12}$ の大小を調べる．

$$\frac{7}{9}=\log_7 7^{\frac{7}{9}}$$

$\log_7 x$ は単調増加な関数より，$\dfrac{7}{9}$ と $\log_7 5$ の大小は，$7^{\frac{7}{9}}$ と 5 の大小，すなわち 7^7 と 5^9 の大小と一致する．

$$7^7=49^{\frac{7}{2}}<50^{\frac{7}{2}}=5^7\cdot 2^{\frac{7}{2}}<5^7\cdot 2^4=5^7\cdot 16<5^7\cdot 5^2<5^9$$

$$\therefore\quad \frac{7}{9}<\log_7 5\qquad\cdots\cdots ①$$

つぎに

$$\frac{7}{9} = \frac{1}{\frac{9}{7}} = \frac{1}{\log_6 6^{\frac{9}{7}}}$$

$\dfrac{1}{\log_6 x}$ は単調減少な関数より，$\dfrac{7}{9}$ と $\dfrac{1}{\log_6 12}$ の大小は，$6^{\frac{9}{7}}$ と 12 の大小の逆，すなわち 6^9 と 12^7 の大小の逆である．

$$12^7 = 6^7 \cdot 2^6 = 6^7 \cdot 64 > 6^7 \cdot 36 = 6^7 \cdot 6^2 = 6^9$$

$$\therefore \quad \frac{7}{9} > \frac{1}{\log_6 12} \qquad \cdots\cdots ②$$

①，②より，小さい順に並べると

$$\boldsymbol{\frac{1}{\log_6 12} < \frac{7}{9} < \log_7 5} \qquad \cdots\cdots(答)$$