

a, b を 1 と異なる正の数とする。次の問いに答えよ。

- (1) $\log_2 \sqrt{a} - \log_a 2 = \frac{1}{2}$ を満たす a を求めよ。
 (2) $\log_2 \sqrt{a} - \log_a 2 \geq \frac{1}{2}$ を満たす a の範囲を求めよ。
 (3) $a > 1$ かつ $b > 1$ とする。 $\log_b \sqrt{a} - \log_a b \geq \frac{1}{2}$ を満たすとき、 a と b^2 の大小関係を調べよ。
 (4) $a + b \leq 8$ かつ $\log_b \sqrt{a} - \log_a b \geq \frac{1}{2}$ を満たす自然数の組 (a, b) をすべて求めよ。

(18 金沢大 人間社会 2)

【答】

- (1) $a = \frac{1}{2}, 4$
 (2) $\frac{1}{2} \leq a < 1, 4 \leq a$
 (3) $a \geq b^2$
 (4) $(a, b) = (4, 2), (5, 2), (6, 2)$

【解答】

- (1) a は 1 と異なる正の数より、真数条件、底条件を満たしている。与えられた方程式を変形して

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log_2 a - \frac{1}{\log_2 a} &= \frac{1}{2} \\ \frac{(\log_2 a)^2 - \log_2 a - 2}{2 \log_2 a} &= 0 \\ \frac{(\log_2 a + 1)(\log_2 a - 2)}{2 \log_2 a} &= 0 \end{aligned}$$

$a \neq 1$ より $\log_2 a \neq 0$ であるから

$$\begin{aligned} (\log_2 a + 1)(\log_2 a - 2) &= 0 \\ \therefore \log_2 a &= -1, 2 \\ \therefore a &= 2^{-1}, 2^2 \\ \therefore a &= \frac{1}{2}, 4 \end{aligned}$$

……(答)

- (2) 与えられた不等式を変形して

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log_2 a - \frac{1}{\log_2 a} &\geq \frac{1}{2} \\ \frac{(\log_2 a + 1)(\log_2 a - 2)}{2 \log_2 a} &\geq 0 \end{aligned}$$

$a \neq 1$ より、 $\log_2 a \neq 0$ であり、 $(\log_2 a)^2 > 0$ であるから

$$\begin{aligned} \log_2 a(\log_2 a + 1)(\log_2 a - 2) &\geq 0 \\ \therefore -1 \leq \log_2 a < 0, 2 \leq \log_2 a \\ \therefore \log_2 2^{-1} \leq \log_2 a < \log_2 1, \log_2 2^2 \leq \log_2 a \end{aligned}$$

よって a の範囲は

$$\frac{1}{2} \leq a < 1, \quad 4 \leq a \quad \dots\dots(\text{答})$$

(3) a, b は 1 と異なる正の数より, 真数条件, 底条件を満たしている. 底を b にそろえると

$$\frac{1}{2} \log_b a - \frac{1}{\log_b a} \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{(\log_b a + 1)(\log_b a - 2)}{2 \log_b a} \geq 0$$

$a > 1$ かつ $b > 1$ より $\log_b a > 0, \log_b a + 1 > 0$ であるから

$$\log_b a \geq 2$$

$$\therefore a \geq b^2 \quad \dots\dots(\text{答})$$

(4) a, b は自然数であり, 1 と異なるから, (3) の条件を満たす. したがって, 与えられた a, b の条件は (3) の結果もあわせると

$$\begin{cases} a > 1 \\ b > 1 \\ a + b \leq 8 \\ a \geq b^2 \end{cases}$$

である. ab 平面にこれを図示すると右図の斜線部分となる. 境界は実線部分は含み, 破線部分は除く. よって, 条件を満たす自然数の組 (a, b) は

$$(a, b) = (4, 2), (5, 2), (6, 2) \quad \dots\dots(\text{答})$$

