α は $0 < \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とし，四角形 ABCD に関する次の 2 つの条件を考える．

(i) 四角形 ABCD は半径 1 の円に内接する．
(ii) $\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{DAB} = \alpha$.

条件 (i) と (ii) を満たす四角形のなかで，4 辺の長さの積

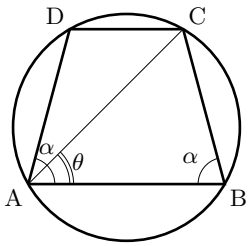
$$k = \mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC} \cdot \mathrm{CD} \cdot \mathrm{DA}$$

が最大となるものについて，k の値を求めよ．

(18 京都大 理 3)

【答】 $4\sin^4\alpha$

【解答】



条件 (i)，(ii) より，四角形 ABCD は半径 1 の円に内接する等脚台形である．

$\angle\mathrm{CAB} = \theta$ $(0 < \theta < \alpha)$ とおくと

$$\angle\mathrm{ACB} = \pi - (\alpha + \theta)$$
$$\angle\mathrm{CAD} = \alpha - \theta$$
$$\angle\mathrm{ACD} = \theta$$

である．△ABC，△ACD において，正弦定理を用いると

$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin\{\pi - (\alpha+\theta)\}} = \frac{\mathrm{BC}}{\sin\theta} = 2 \cdot 1,$$
$$\frac{\mathrm{CD}}{\sin(\alpha-\theta)} = \frac{\mathrm{DA}}{\sin\theta} = 2 \cdot 1$$

であり，四角形の 4 辺の長さは

$$\mathrm{AB} = 2\sin(\alpha+\theta),$$
$$\mathrm{BC} = 2\sin\theta,$$
$$\mathrm{CD} = 2\sin(\alpha-\theta),$$
$$\mathrm{DA} = 2\sin\theta$$

である．したがって，4 辺の長さの積 k は

$$\begin{aligned} k &= 2\sin(\alpha+\theta)\cdot 2\sin\theta \cdot 2\sin(\alpha-\theta)\cdot 2\sin\theta \\ &= 16\sin^2\theta \cdot \sin(\alpha+\theta)\sin(\alpha-\theta) \\ &= 16\frac{1-\cos 2\theta}{2}\cdot\frac{1}{2}(\cos 2\theta - \cos 2\alpha) \quad (\because \text{ 半角の公式，積和の公式}) \end{aligned}$$

$\cos 2\theta = x$ とおくと

$$\begin{aligned} k &= 4(1-x)(x-\cos 2\alpha) \\ &= -4\{x^2 - (1+\cos 2\alpha)x + \cos 2\alpha\} \\ &= -4\left(x - \frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)^2 + (1+\cos 2\alpha)^2 - 4\cos 2\alpha \\ &= -4\left(x - \frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)^2 + (1-\cos 2\alpha)^2 \end{aligned}$$

θ は $0 < \theta < \alpha$ だから，$0 < 2\theta < 2\alpha$ $(\leqq \pi)$ であり，x は $\cos 2\alpha < x < 1$ の範囲を動く．
よって，k は $x = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ のとき最大となり，求める最大値は

$$(1 - \cos 2a)^2 = (2\sin^2\theta)^2 = \boldsymbol{4\sin^4\alpha} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$