以下の文章の空欄に適切な数，式または数学記号を入れて文章を完成させよ．

AB $=$ AC である三角形 ABC を考える．BC を底辺とし，底辺の長さを 1，三角形 ABC の高さを h とする．

(1) 三角形 ABC の外接円 R の半径 r は $\boxed{\text{ア}}$ である．

(2) 外接円 R の中心を O とし，OA と OC を 2 辺とする平行四辺形 AOCD を考える．D が R の周上にあるのは $h = \boxed{\text{イ}}$ のときである．

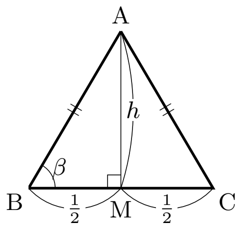
(18 奈良県医大 医 3)

【答】

ア	イ
$\dfrac{h}{2}+\dfrac{1}{8h}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【解答】

(1) BC の中点を M とし，$\angle\mathrm{ABC} = \beta$ とおくと



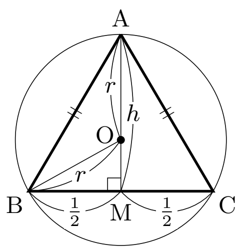
$$\sin\beta = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{h}{\sqrt{h^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{h}{\sqrt{h^2+\frac{1}{4}}}$$

正弦定理より

$$r = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{AC}}{\sin\beta} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{h^2+\frac{1}{4}}}{\frac{h}{\sqrt{h^2+\frac{1}{4}}}} = \frac{h^2+\frac{1}{4}}{2h}$$

$$= \boldsymbol{\frac{h}{2}+\frac{1}{8h}}$$ ……(答)

- 外心を O とし，△OBM において三平方の定理を用いると

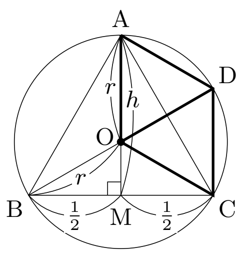


$$(h-r)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 = r^2$$

$$h^2-2hr+r^2+\frac{1}{4} = r^2$$

$$\therefore\quad r = \frac{h^2+\frac{1}{4}}{2h} = \frac{h}{2}+\frac{1}{8h}$$

(2) OA $=$ OC なので，平行四辺形 AOCD はひし形である．したがって，D は R の周上にあるのは △OAD，△OCD が正三角形となるときである．



このとき，AC は ∠OAD を二等分するから，$\angle\mathrm{OAC} = 30^\circ$ である．

また，AO は ∠BAC の二等分するから

$$\angle\mathrm{BAC} = 2\angle\mathrm{OAC} = 60^\circ$$

である．よって，二等辺三角形 ABC は正三角形である．

$$h = \sqrt{3}\mathrm{BM} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$ ……(答)