3 辺の長さが $2x$, $x+6$, 6 である三角形を考える．この三角形が鋭角三角形となるのは，x の範囲が

$$\boxed{\text{ア}} < x < \boxed{\text{イ}} + \boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$$

のときである．このとき，1 つの角が $\frac{\pi}{3}$ となるのは，

$$x = \boxed{\text{オ}} + \sqrt{\boxed{\text{カキ}}}$$

のときである．

(18 東京理大 (数・物・化) 1(1))

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カキ
4	2	2	7	1	13

【解答】

$2x$, $x+6$, 6 は辺の長さであるから，$x>0$ が必要である．

3 辺の長さが $2x$, $x+6$, 6 である三角形が鋭角三角形となる条件は，最大角が鋭角となることである．最大角は最大辺の対角であり，$x+6>6$ であることに注意すると，最大辺の長さの候補は $2x$, $x+6$ である．したがって，求める条件は

$$(\text{i})\begin{cases} x+6 \leqq 2x \\ (2x)^2 < (x+6)^2+6^2 \end{cases} \quad \text{または} \quad (\text{ii})\begin{cases} 2x \leqq x+6 \\ (x+6)^2 < (2x)^2+6^2 \end{cases}$$

である．

(i) のとき

$$(\text{i}) \iff \begin{cases} 6 \leqq x \\ 3x^2-12x-72<0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6 \leqq x \\ 2-2\sqrt{7} < x < 2+2\sqrt{7} \end{cases}$$

$$\therefore \quad 6 \leqq x < 2+2\sqrt{7}$$

(ii) のとき

$$(\text{ii}) \iff \begin{cases} x \leqq 6 \\ 3x^2-12x>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leqq 6 \\ x<0 \text{ または } 4<x \end{cases}$$

$$\therefore \quad 4 < x \leqq 6 \quad (\because\ x>0)$$

(i) または (ii) より，x の値の範囲は

$$\boxed{4} < x < \boxed{2+2\sqrt{7}} \qquad \cdots\cdots\ (\text{ア～エの答})$$

である．

このとき，三角形は正三角形になることはなく ($\because\ x+6 \fallingdotseq 6$)，内角の 1 つである $\frac{\pi}{3}$ は最大角でも最小角でもない．

(i) のとき，$6 < x+6 \leqq 2x$ であり，$\dfrac{\pi}{3}$ の対辺の長さは $x+6$ であるから

$$\begin{aligned}
\cos\frac{\pi}{3} &= \frac{6^2+(2x)^2-(x+6)^2}{2\cdot 6\cdot(2x)} \\
\frac{1}{2} &= \frac{3x^2-12x}{24x} \\
\therefore\quad \frac{1}{2} &= \frac{x-4}{8} \qquad \therefore\quad x=8
\end{aligned}$$

これは $6 \leqq x < 2+2\sqrt{7}$ を満たさない．

(ii) のとき，$6 < 2x \leqq x+6$ であり，$\dfrac{\pi}{3}$ の対辺の長さは $2x$ であるから

$$\begin{aligned}
\cos\frac{\pi}{3} &= \frac{6^2+(x+6)^2-(2x)^2}{2\cdot 6\cdot(x+6)} \\
\frac{1}{2} &= \frac{-3x^2+12x+72}{12(x+6)} \\
\therefore\quad & 2(x+6) = -(x^2-4x-24) \\
\therefore\quad & x^2-2x-12=0 \qquad \therefore\quad x=1\pm\sqrt{13}
\end{aligned}$$

$4 < x \leqq 6$ もあわせると　$x=1+\sqrt{13}$

以上より，求める x の値は

$$x = \boxed{1+\sqrt{13}} \qquad \cdots\cdots\ (\text{オ，カキの答})$$

である．

- a, b, c を 3 辺の長さとする三角形が存在する条件は

  $|a-b| < c < a+b \quad \cdots\cdots$ ㋐

  が成り立つことである．
- c が最大のとき，
  a, b, c を 3 辺の長さとする三角形が存在する条件は

  「$c < a+b$ …… ㋐′」，

  a, b, c を 3 辺の長さとする鋭角三角形が存在する条件は

  「$c^2 < a^2+b^2$」，

  a, b, c を 3 辺の長さとする鈍角三角形が存在する条件は

  「㋐′ かつ $c^2 > a^2+b^2$」

  が成り立つことである．
- 最大辺の長さに着目せずに，鋭角三角形が存在する条件として

  $$\begin{cases} (2x)^2 < (x+6)^2+6^2 \\ (x+6)^2 < 6^2+(2x)^2 \\ 6^2 < (2x)^2+(x+6)^2 \end{cases}$$

  を解いてもよい．
- 数学 I までの学習者は「角が $\dfrac{\pi}{3}$」を「角が 60°」として問題を読んでほしい．