三角形 ABC の内接円の半径を r，外接円の半径を R とし，$h = \dfrac{r}{R}$ とする．また，$\angle\mathrm{A} = 2\alpha$, $\angle\mathrm{B} = 2\beta$, $\angle\mathrm{C} = 2\gamma$ とおく．

(1) $h = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ となることを示せ．

(2) 三角形 ABC が直角三角形のとき $h \leqq \sqrt{2} - 1$ が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つのはどのような場合か．

(3) 一般の三角形 ABC に対して $h \leqq \dfrac{1}{2}$ が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つのはどのような場合か．

【答】

(1) 略

(2) 証明略．等号が成り立つのは，直角二等辺三角形のときである．

(3) 証明略．等号が成り立つのは，正三角形のときである．

【解答】

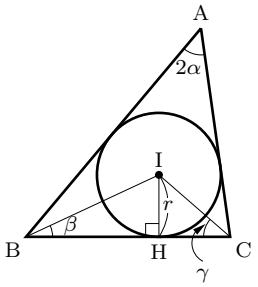
(1) 内心 I から辺 BC に下ろした垂線の足を H とし

$$\mathrm{BC} = \mathrm{BH} + \mathrm{HC} \qquad \cdots\cdots ①$$

を外接円の半径 R，内接円の半径 r を用いて表す．

まず，正弦定理より

$$\begin{aligned}\mathrm{BC} &= 2R\sin 2\alpha \\ &= 4R\sin\alpha\cos\alpha\end{aligned}$$



一方，IB，IC はそれぞれ $\angle\mathrm{B}$，$\angle\mathrm{C}$ の二等分線であるから，$\angle\mathrm{IBH} = \beta$，$\angle\mathrm{ICH} = \gamma$ である．

$$\begin{aligned}&\mathrm{BH} + \mathrm{CH} \\ =&\frac{r}{\tan\beta} + \frac{r}{\tan\gamma} \\ =&r\frac{\cos\beta\sin\gamma + \sin\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} \\ =&r\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}\end{aligned}$$

ここで，$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = \pi$ より $\alpha + \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\mathrm{BH} + \mathrm{CH} = r\frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\beta\sin\gamma} = r\frac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}$$

したがって，①は

$$4R\sin\alpha\cos\alpha = r\frac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}$$

$$\therefore\quad h = \frac{r}{R} = 4\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\cos\alpha} = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

であり

$$h = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

は成り立つ． ……(証明終わり)

- 三角形 ABC の内接円の半径 r を用いた関係式として

$$\triangle\mathrm{ABC}\text{ の面積} = r\frac{\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}}{2}$$

を利用してもよい．ただし,【解答】より計算量は増える．

$$\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CA}\sin 2\alpha = r\frac{\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}}{2}$$
$$\therefore\quad \mathrm{AB}\cdot\mathrm{CA}\sin 2\alpha = r(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})$$

正弦定理より，各辺の長さを外接円の半径 R を用いて表すと

$$2R\sin 2\gamma\cdot 2R\sin 2\beta\cdot\sin 2\alpha = r(2R\sin 2\gamma + 2R\sin 2\alpha + 2R\sin 2\beta)$$
$$2R\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma = r(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma)$$
$$\therefore\quad h = \frac{r}{R} = \frac{2\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma}{\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma}$$

ここで

$$\begin{aligned}(\text{分子}) &= 2\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha\cdot 2\sin\beta\cos\beta\cdot 2\sin\gamma\cos\gamma\\ &= 16\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\end{aligned}$$

$2\alpha+2\beta+2\gamma=\pi$ より $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}(\text{分母}) &= \sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma\\ &= 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+2\sin\gamma\cos\gamma\\ &= 2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)\cos(\alpha-\beta)+2\sin\gamma\cos\gamma\\ &= 2\cos\gamma\left\{\cos(\alpha-\beta)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)\right\}\\ &= 2\cos\gamma\{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\}\\ &= 2\cos\gamma\cdot 2\cos\alpha\cos\beta\\ &= 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}h &= \frac{16\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\\ &= 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\end{aligned}$$

(2) h の α, β, γ に関する対称性より，直角三角形 ABC に対して $\angle\mathrm{C}=2\gamma=\dfrac{\pi}{2}$ としても一般性を失わない．このとき $\gamma=\dfrac{\pi}{4}$，$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$ である．(1) より

$$\begin{aligned}h &= 4\cdot\frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \sqrt{2}\left\{\cos(\alpha-\beta)-\cos\frac{\pi}{4}\right\}\\ &= \sqrt{2}\cos(\alpha-\beta)-1\\ &\leqq \sqrt{2}-1\end{aligned}$$

…… (証明終わり)

また，等号が成り立つのは，$\cos(\alpha-\beta)=1$ のときである．$-\dfrac{\pi}{4}<\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{4}$ より

$$\alpha-\beta=0\qquad\therefore\quad \alpha=\beta\left(=\frac{\pi}{8}\right)\qquad\therefore\quad \angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{B}\left(=\frac{\pi}{4}\right)$$

のときである．

よって，($\angle$A，$\angle$B が $\dfrac{\pi}{2}$ のときも) 等号が成り立つのは，三角形 ABC が**直角二等辺三角形**のときである． ……(答)

(3) $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}
h &= 4\cdot\frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}\cdot\sin\gamma \\
&= 2\left\{\cos(\alpha-\beta)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)\right\}\cdot\sin\gamma \\
&= -2\sin^2\gamma+2\cos(\alpha-\beta)\sin\gamma \\
&= -2\left\{\sin\gamma-\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)\right\}^2+\frac{1}{2}\cos^2(\alpha-\beta) \\
&\leqq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

…… (証明終わり)

また，等号が成り立つのは

$$\begin{cases}\sin\gamma-\dfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)=0\\ \cos^2(\alpha-\beta)=1\end{cases}$$

のときであり，$-\dfrac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$ より

$$\begin{cases}\cos(\alpha-\beta)=1\\ \sin\gamma=\dfrac{1}{2}\end{cases}\iff\begin{cases}\alpha-\beta=0\\ \gamma=\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$$

$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$ とあわせると

$$\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{6}\qquad\therefore\quad\angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{B}=\angle\mathrm{C}=\frac{\pi}{3}$$

のときである．すなわち三角形 ABC が**正三角形**のときである． ……(答)

- 三角形の内接円の半径 r と外接円の半径 R と内心と外心の距離 d の間には

  $$d^2=R(R-2r)\qquad\text{(チャップル・オイラーの定理)}$$

  という関係式が成り立つ．これにより

  $$R\geqq 2r\qquad\text{(オイラーの不等式)，すなわち}\quad h=\frac{r}{R}\leqq\frac{1}{2}$$

  が成り立つことが分かる．
- オイラーの不等式は，次の 2 つの不等式

  「3 文字の相加平均・相乗平均の不等式」

  $x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0$ ならば

  $$\frac{x+y+z}{3}\geqq\sqrt[3]{xyz}$$

  が成り立つ．等号が成立するのは $x=y=z$ のときである．

  「凸関数の不等式」

  $f(x)$ が上に凸な関数であるとき

  $p\geqq 0,\ q\geqq 0,\ r\geqq 0,\ p+q+r=1$ に対して

  $$f(px+qy+rz)\geqq pf(x)+qf(y)+rf(z)\qquad\text{(Jensen の不等式)}$$

  が成り立つ．等号が成り立つのは $x=y=z$ が成り立つときである．

を用いて直接示すこともできる (どちらも教科書では扱われていない). すなわち

$$
\begin{aligned}
h &= 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \\
&\leqq 4\left(\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\right)^3 \qquad (\because\ \text{相加平均・相乗平均の不等式}) \\
&\leqq 4\left(\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^3 \qquad (\because\ \text{Jensen の不等式}) \\
&= 4\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^3 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

等号が成立するのは

$$
\begin{cases}\sin\alpha=\sin\beta=\sin\gamma \\ \alpha=\beta=\gamma\end{cases} \qquad \therefore \quad \alpha=\beta=\gamma
$$

△ABC は正三角形である.