

$0 \leq x < 2\pi$ とするとき、次の不等式を解きなさい。

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x < 0$$

【答】 $0 \leq x < \frac{\pi}{3}$, $\frac{4}{3}\pi < x < 2\pi$

【解答】

三角関数の合成公式を用いると

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\therefore 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}'$$

$0 \leq x < 2\pi$ より、 $-\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi$ であるから、 $\textcircled{1}'$ をみたます x の範囲は

$$-\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} < 0, \quad \pi < x - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi$$

$$\therefore 0 \leq x < \frac{\pi}{3}, \quad \frac{4}{3}\pi < x < 2\pi \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

• $0 \leq x < 2\pi$ において、 $\cos x$ の符号で場合分けする。

(i) $\cos x = 0$ ($x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$) のとき；

$$\textcircled{1} \iff \sin x < 0$$

$$\therefore x = \frac{3}{2}\pi$$

(ii) $\cos x > 0$ ($0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$) のとき；

$$\textcircled{1} \iff \tan x < \sqrt{3}$$

$$\therefore 0 \leq x < \frac{\pi}{3}, \quad \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$$

(iii) $\cos x < 0$ ($\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{3}{2}\pi$) のとき；

$$\textcircled{1} \iff \tan x > \sqrt{3}$$

$$\therefore \frac{4}{3}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$$

以上 (i), (ii), (iii) より

$$0 \leq x < \frac{\pi}{3}, \quad \frac{4}{3}\pi < x < 2\pi$$

