三角形 ABC において，$C = 45^\circ$ かつ $\cos A \cos B = -\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$ が成り立つとき，$\cos(A-B) = \boxed{\text{ア}}$ である．

(18 小樽商大 3(1))

【答】

ア
$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

【解答】

積和公式を用いると

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}\{\cos(A+B) + \cos(A-B)\}$$

また，$C = 45^\circ$ より $A + B = 135^\circ$ であるから

$$\begin{aligned}\cos(A-B) &= 2\cos A \cos B - \cos(A+B)\\ &= 2 \cdot \left(-\frac{1}{4\sqrt{2}}\right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ &= -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{4}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

- 積和の公式は教科書では発展事項になっている．加法定理を用いて本問を解いておこう．
  cos の加法定理は

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \qquad \cdots\cdots ①$$
$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \qquad \cdots\cdots ②$$

与えられた条件の $\cos A \cos B = -\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$ を代入すると

$$\cos(A+B) = -\frac{1}{4\sqrt{2}} - \sin A \sin B \qquad \cdots\cdots ①'$$
$$\cos(A-B) = -\frac{1}{4\sqrt{2}} + \sin A \sin B \qquad \cdots\cdots ②'$$

である．また，$C = 45^\circ$ より $A + B = 135^\circ$ であるから

$$①' \iff -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{2}} - \sin A \sin B$$
$$\therefore \quad \sin A \sin B = \frac{3}{4\sqrt{2}}$$

②′ に代入して

$$\cos(A-B) = -\frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{3}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$