以下の各問に答えよ．

(1) 実数 θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ を満たすとする．このとき，$\tan 2\theta$ を $\tan\theta$ を使って表せ．答えのみを書けばよい．

(2) 2 つの実数 $\alpha,\ \beta$ はそれぞれ

$$0<\alpha<\frac{\pi}{4},\quad 0<\beta<\frac{\pi}{2}$$

を満たすとする．次の (i) と (ii) の各命題に対して，その真偽を述べよ．また，真ならば証明し，偽ならば反例を示せ．

(i) $\tan\alpha$ が無理数ならば，$\tan 2\alpha$ は無理数である．

(ii) $\tan\beta$ が無理数ならば，$\tan\dfrac{\beta}{2}$ は無理数である．

(18 茨城大 工 6)

【答】

(1) $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

(2) (i) 偽，反例 $\alpha=\dfrac{\pi}{8}$

(ii) 真，証明略．

【解答】

(1) $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ より，$0<2\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\tan 2\theta$ は定義可能であり

$$\tan 2\theta=\boldsymbol{\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) (i) α が $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ を満たすとき，

命題「$\tan\alpha$ が無理数ならば，$\tan 2\alpha$ は無理数である．」

は **偽** である．……(答)

反例としては，$\tan\alpha$ が無理数で，$\tan 2\alpha$ が有理数であるような α $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ をみつければよい．

$\tan 2\alpha=1$ (有理数) となる α について調べてみる．

$$2\alpha=\frac{\pi}{4}+n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

$n=0$ とし $\alpha=\dfrac{\pi}{8}$ をとると，α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ を満たす．

一方，(1) より

$$1=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\tan^2\alpha+2\tan\alpha-1=0$$

$\tan\alpha>0$ より

$$\tan\alpha=-1+\sqrt{2}$$

$\sqrt{2}$ は無理数であるから，$\tan\alpha$ も無理数である．

よって，$\boldsymbol{\alpha=\dfrac{\pi}{8}}$ が反例となる．……(答)

(ii) β が $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとき，

命題「$\tan\beta$ が無理数ならば，$\tan\dfrac{\beta}{2}$ は無理数である.」

は **真** である. ……(答)

［証明］ 対偶，すなわち

「$\tan\dfrac{\beta}{2}$ が有理数ならば，$\tan\beta$ は有理数である.」

を証明する.

$0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ より，$0 < \dfrac{\beta}{2} < \dfrac{\pi}{4}$ であり

$$0 < \tan\frac{\beta}{2} < 1$$

$\tan\dfrac{\beta}{2}$ が有理数ならば

$$\tan\frac{\beta}{2} = \frac{m}{n} \quad (m,\ n \text{ は互いに素な自然数，} m < n)$$

とおくことができる．このとき

$$\begin{aligned}\tan\beta &= \frac{2\tan\dfrac{\beta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\beta}{2}} = \frac{2\cdot\dfrac{m}{n}}{1-\left(\dfrac{m}{n}\right)^2} \\ &= \frac{2mn}{n^2-m^2} \\ &= \frac{2mn}{(n-m)(n+m)}\end{aligned}$$

となる．分母，分子は整数で (分母) $\neq 0$ であるから，$\tan\beta$ は有理数である.

…… (証明終わり)