次の関数の最大値と最小値を求めよ．

$$y = 2\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 4\cos^2 x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$$

(18 日本女大 理 1)

【答】 最大値 $\dfrac{1}{2}(6+\sqrt{13})$， 最小値 $\dfrac{1}{2}(6-\sqrt{13})$

【解答】

与えられた式を整理する．

$$\begin{aligned} y &= 2\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 4\cos^2 x \\ &= 2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2} + 3\cdot\frac{\sin 2x}{2} + 4\cdot\frac{1+\cos 2x}{2} \\ &= \frac{1}{2}(3\sin 2x + 2\cos 2x + 6) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{13}\left(\sin 2x\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} + \cos 2x\cdot\frac{2}{\sqrt{13}} + 6\right) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\sqrt{13}\sin(2x+\alpha)+6\right\} \end{aligned}$$

$\left(\text{ただし，}\alpha \text{ は } \cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{13}} \text{ かつ } \sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{13}} \text{ をみたす定角である}\right)$

よって，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ において y は

最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}(6+\sqrt{13})}$， 最小値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}(6-\sqrt{13})}$ ……(答)

をとる．