

正三角形 ABC が半径 1 の円に内接しているとする。 P は点 A, B と異なる点で、 A, B を両端とし点 C を含まない弧の上を動くものとする。以下の問いに答えよ。

- (1) $\angle PBA = \theta$ とおくとき、 PA, PB, PC をそれぞれ θ を用いて表せ。また、 $PA + PB + PC$ の最大値を求めよ。
 (2) $PA^2 + PB^2 + PC^2$ を求めよ。

(18 熊本大 教育・医 (保健) 2)

【答】

(1) $PA = 2 \sin \theta, PB = 2 \sin \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right), PC = 2 \sin \left(\frac{\pi}{3} + \theta \right)$

(2) 6

【解答】

- (1) 正三角形の内角は $\frac{\pi}{3}$ であり、 $\angle PBA = \theta$ であることから

$$\begin{aligned} \angle PCB &= \frac{\pi}{3} - \theta, \\ \angle PBC &= \frac{\pi}{3} + \theta \end{aligned}$$

である。 $\triangle PBA, \triangle PBC$ は半径 1 の円に内接しているから、正弦定理より

$$\frac{PA}{\sin \theta} = 2 \cdot 1, \frac{PB}{\sin \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right)} = \frac{PC}{\sin \left(\frac{\pi}{3} + \theta \right)} = 2 \cdot 1$$

$$\therefore PA = 2 \sin \theta, PB = 2 \sin \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right), PC = 2 \sin \left(\frac{\pi}{3} + \theta \right) \quad \dots\dots(\text{答})$$

である。また

$$\begin{aligned} PA + PB + PC &= 2 \sin \theta + 2 \sin \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right) + 2 \sin \left(\frac{\pi}{3} + \theta \right) \\ &= 2 \sin \theta + 2 \cdot 2 \sin \frac{\pi}{3} \cos(-\theta) \\ &\quad (\because \text{和を積に直す公式, 加法定理で展開してもよい}) \\ &= 2 \sin \theta + 2\sqrt{3} \cos \theta \\ &= 4 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \quad (\because \text{合成の公式}) \end{aligned}$$

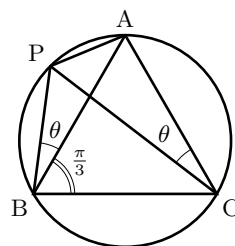
となる。ここで、 θ は

$$\begin{cases} \theta > 0 \\ \frac{\pi}{3} - \theta > 0 \end{cases} \quad \therefore 0 < \theta < \frac{\pi}{3}$$

であり、 $\frac{\pi}{3} < \theta + \frac{\pi}{3} < \frac{2}{3}\pi$ であるから、 $PA + PB + PC$ は $\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ すなわち $\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき

$$\text{最大値 } 4 \quad \dots\dots(\text{答})$$

をとる。



(2) (1) の PA, PB, PC の値を代入すると

$$\begin{aligned}
 & PA^2 + PB^2 + PC^2 \\
 &= 4\sin^2\theta + 4\sin^2\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) + 4\sin^2\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) \\
 &= 2(1 - \cos 2\theta) + 2\left\{1 - \cos 2\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\right\} + 2\left\{1 - \cos 2\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)\right\} \\
 &\quad (\because \text{半角の公式}) \\
 &= 6 - 2\cos 2\theta - 2\cos\left(\frac{2}{3}\pi - 2\theta\right) - 2\cos\left(\frac{2}{3}\pi + 2\theta\right) \\
 &= 6 - 2\cos 2\theta - 2 \cdot 2\cos\frac{2}{3}\pi\cos(-2\theta) \quad (\because \text{和を積に直す公式}) \\
 &= 6 - 2\cos 2\theta + 2\cos 2\theta \\
 &= 6 \qquad \dots\dots(\text{答})
 \end{aligned}$$

である.

- 加法定理で展開してもよい.

$$\begin{aligned}
 & PA^2 + PB^2 + PC^2 \\
 &= 4\sin^2\theta + 4\sin^2\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) + 4\sin^2\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) \\
 &= 4\sin^2\theta + 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\right)^2 + 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\right)^2 \\
 &= 4\sin^2\theta + 4\left(\frac{3}{4}\cos^2\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{4}\sin^2\theta\right) \\
 &\quad + 4\left(\frac{3}{4}\cos^2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{4}\sin^2\theta\right) \\
 &= 6\sin^2\theta + 6\cos^2\theta \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

である.