正三角形 ABC が半径 1 の円に内接しているとする．P は点 A，B と異なる点で，A，B を両端とし点 C を含まない弧の上を動くものとする．以下の問いに答えよ．

(1) $\angle \mathrm{PBA} = \theta$ とおくとき，PA，PB，PC をそれぞれ θ を用いて表せ．また，$\mathrm{PA} + \mathrm{PB} + \mathrm{PC}$ の最大値を求めよ．

(2) $\mathrm{PA}^2 + \mathrm{PB}^2 + \mathrm{PC}^2$ を求めよ．

(18 熊本大 教育・医 (保健) 3)

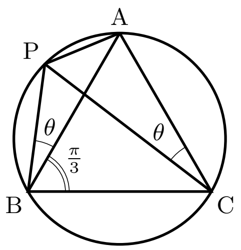
【答】

(1) $\mathrm{PA} = 2\sin\theta,\ \mathrm{PB} = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \theta\right),\ \mathrm{PC} = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \theta\right)$

(2) 6

【解答】

(1) 正三角形の内角は $\dfrac{\pi}{3}$ であり，$\angle \mathrm{PBA} = \theta$ であることから



$$\angle \mathrm{PCB} = \frac{\pi}{3} - \theta,$$
$$\angle \mathrm{PBC} = \frac{\pi}{3} + \theta$$

である．△PBA，△PBC は半径 1 の円に内接しているから，正弦定理より

$$\frac{\mathrm{PA}}{\sin\theta} = 2\cdot 1,\quad \frac{\mathrm{PB}}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)} = \frac{\mathrm{PC}}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)} = 2\cdot 1$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\mathrm{PA} = 2\sin\theta,\ \mathrm{PB} = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right),\ \mathrm{PC} = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．また

$$\begin{aligned}
&\mathrm{PA} + \mathrm{PB} + \mathrm{PC}\\
&= 2\sin\theta + 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)\\
&= 2\sin\theta + 2\cdot 2\sin\frac{\pi}{3}\cos(-\theta)
\end{aligned}$$

(∵ 和を積に直す公式，加法定理で展開してもよい)

$$\begin{aligned}
&= 2\sin\theta + 2\sqrt{3}\cos\theta\\
&= 4\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

(∵ 合成の公式)

となる．ここで，θ は

$$\begin{cases} \theta > 0 \\ \dfrac{\pi}{3} - \theta > 0 \end{cases} \qquad \therefore\quad 0 < \theta < \frac{\pi}{3}$$

であり，$\dfrac{\pi}{3} < \theta + \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{2}{3}\pi$ であるから，$\mathrm{PA} + \mathrm{PB} + \mathrm{PC}$ は $\theta + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき

最大値　4 ……(答)

をとる．

(2) (1) の PA, PB, PC の値を代入すると

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2\\
&=4\sin^2\theta+4\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)+4\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\\
&=2(1-\cos 2\theta)+2\left\{1-\cos 2\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\right\}+2\left\{1-\cos 2\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\right\}\\
&\qquad(\because\ \text{半角の公式})\\
&=6-2\cos 2\theta-2\cos\left(\frac{2}{3}\pi-2\theta\right)-2\cos\left(\frac{2}{3}\pi+2\theta\right)\\
&=6-2\cos 2\theta-2\cdot 2\cos\frac{2}{3}\pi\cos(-2\theta)\quad(\because\ \text{和を積に直す公式})\\
&=6-2\cos 2\theta+2\cos 2\theta\\
&=\mathbf{6}
\end{aligned}
$$

……(答)

である.

- 加法定理で展開してもよい.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2\\
&=4\sin^2\theta+4\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)+4\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\\
&=4\sin^2\theta+4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)^2+4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)^2\\
&=4\sin^2\theta+4\left(\frac{3}{4}\cos^2\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{4}\sin^2\theta\right)\\
&\qquad\qquad+4\left(\frac{3}{4}\cos^2\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{4}\sin^2\theta\right)\\
&=6\sin^2\theta+6\cos^2\theta\\
&=6
\end{aligned}
$$

である.