2点 $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ を直径の両端とする円を C とし，点 $(1,\ -2)$ を通り傾きが -1 である直線を L とする．円 C と直線 L の交点を $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ とし，円 C の円周上に点 $\mathrm{P}(x_3,\ y_3)$ をとる．円 C の中心を D とし，x 軸の正の部分と線分 DP のなす角を θ とする．また，$x_1 < x_2$，$y_3 > -1 - x_3$，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．次の各問に答えなさい．

(1) (i) 円 C と直線 L の方程式をそれぞれ求めなさい．

(ii) 点 A と点 B の座標をそれぞれ求めなさい．

(iii) 線分 AB の長さと $\angle\mathrm{APB}$ の大きさを求めなさい．

(iv) θ の値の範囲を求めなさい．

(2) $\sin\theta$ を用いて以下の (i)，(ii)，(iii) を表しなさい．

(i) 点 P の座標

(ii) 線分 AP と線分 BP の長さ

(iii) 三角形 APB の面積

(3) $\sin 2\theta + 2\sin\theta = 0$ とする．

(i) θ の値を求めなさい．

(ii) 三角形 APB の内接円の半径と中心の座標を求めなさい．

(18 帯広畜産大 1)

【答】

(1) (i) $C : x^2 + y^2 = 1$，$y = -x - 1$

(ii) $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ -1)$

(iii) $\mathrm{AB} = \sqrt{2}$，$\angle\mathrm{APB} = \dfrac{\pi}{4}$

(iv) $0 \leqq \theta < \pi$，$\dfrac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

(2) (i) $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$

(ii) $\mathrm{AP} = \sqrt{2 + 2\cos\theta}$，$\mathrm{BP} = \sqrt{2 + 2\sin\theta}$

(iii) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(1+\sin\theta)(1+\cos\theta)}$ (あるいは $\dfrac{1}{2}|1 + \sin\theta + \cos\theta|$)

(3) (i) $\theta = 0$

(ii) 半径 $\sqrt{2} - 1$，中心の座標 $\left(0,\ 1 - \sqrt{2}\right)$

【解答】

(1) (i) 円 C は 2 点 $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ を直径の両端とする円であるから，中心 D は 2 点を結ぶ線分の中点であり，その座標は $(0,\ 0)$ である．半径は 2 点を結ぶ線分の長さの $\dfrac{1}{2}$ であるから

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2+2} = 1$$

である．よって，円 C の方程式は

$$\boldsymbol{C : x^2 + y^2 = 1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

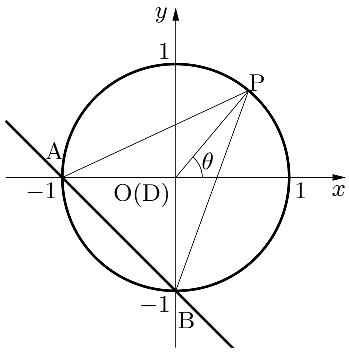
である．

また，点 $(1,\ -2)$ を通り傾きが -1 である直線 L の方程式は

$$y=-(x-1)-2 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{L : y=-x-1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(ii) $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ $(x_1<x_2)$ は円 C と直線 L の交点であるから



$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=-x-1 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-x-1 \\ x^2+(-x-1)^2=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-x-1 \\ 2x^2+2x=0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} y=-x-1 \\ x=-1,\ 0 \end{cases}$$

$x_1<x_2$ より

$$\mathbf{A(-1,\ 0),\quad B(0,\ -1)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(iii) 線分 AB の長さは

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\boldsymbol{\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．また，円周角の定理により

$$\angle\mathrm{APB}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{ADB}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(iv) 円 C の円周上の点 $\mathrm{P}(x_3,\ y_3)$ は $y_3>-1-x_3$ を満たすから，P は円 C の円周かつ直線 L の上側の部分にある．よって，θ $(0\leqq\theta<2\pi)$ の値の範囲は

$$\boldsymbol{0\leqq\theta<\pi,\ \frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) (i) $\qquad \mathbf{P}(\boldsymbol{\cos\theta,\ \sin\theta})$ $\qquad \cdots\cdots(答)$

- 問題文は「$\sin\theta$ を用いて」となっている．これに従うと P の座標は

$$\begin{cases} 0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2}<\theta<2\pi \text{ のとき} & \mathrm{P}\left(\sqrt{1-\sin^2\theta},\ \sin\theta\right) \\ \dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi \text{ のとき} & \mathrm{P}\left(-\sqrt{1-\sin^2\theta},\ \sin\theta\right) \end{cases}$$

となる．(ii)，(iii) でもこの場合分けが続くのは煩わしいので,「θ を用いて」と解釈して解答することにした．

(ii) 距離の公式より

$$\mathrm{AP}=\sqrt{(\cos\theta+1)^2+\sin^2\theta}=\boldsymbol{\sqrt{2+2\cos\theta}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$\mathrm{BP}=\sqrt{\cos^2\theta+(\sin\theta+1)^2}=\boldsymbol{\sqrt{2+2\sin\theta}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(iii) (1)(iii)，(2)(ii) より

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{APB}&=\frac{1}{2}\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}\sin\angle\mathrm{APB} \\ &=\frac{1}{2}\sqrt{2+2\cos\theta}\sqrt{2+2\sin\theta}\sin\frac{\pi}{4} \\ &=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(1+\sin\theta)(1+\cos\theta)}} \qquad \cdots\cdots ㋐ \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

である．

- $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(\cos\theta+1,\ \sin\theta)$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,\ -1)$ であるから

$$\triangle\mathrm{APB}=\frac{1}{2}|-(\cos\theta+1)-\sin\theta|=\frac{1}{2}|1+\sin\theta+\cos\theta| \qquad \cdots\cdots ㋑$$

としてもよい．

- ㋐ と ㋑ が一致することを確かめておく．

$$
\begin{aligned}
㋑ &= \frac{1}{2}\sqrt{(1+\sin\theta+\cos\theta)^2}\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin^2\theta+\cos^2\theta+2(\sin\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos\theta)}\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{2+2(\sin\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos\theta)}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+\sin\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos\theta}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(1+\sin\theta)(1+\cos\theta)}\\
&= ㋐
\end{aligned}
$$

である．

(3) $$\sin 2\theta + 2\sin\theta = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

(i) ① を解く．

$$
\begin{aligned}
&2\sin\theta\cos\theta + 2\sin\theta = 0\\
&\sin\theta(\cos\theta+1) = 0\\
&\sin\theta = 0,\ \cos\theta = -1
\end{aligned}
$$

(1)(iv) より $0 \leqq \theta < \pi$, $\dfrac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ であり

$$\boldsymbol{\theta = 0} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

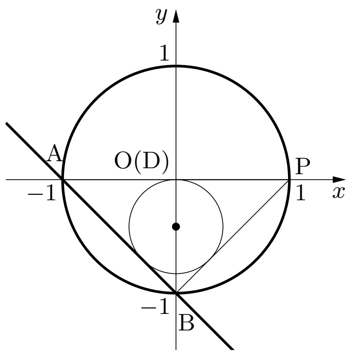
(ii) △APB の内接円の半径を r とおく．r と △APB の面積は次の関係式が成り立つ．

$$\triangle\mathrm{APB} = \frac{1}{2}(\mathrm{AP}+\mathrm{PB}+\mathrm{BA})r$$

$\theta = 0$ のとき，P(1, 0) であるから

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1 = \frac{1}{2}(2+\sqrt{2}+\sqrt{2})r\\
&1 = (1+\sqrt{2})r\\
&\therefore\quad r = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \boldsymbol{\sqrt{2}-1} \qquad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}
$$

である．



また，△APB の内接円の中心の座標は，y 軸に関する対称性により，$(0,\ -r)$ であるから

$$\boldsymbol{(0,\ 1-\sqrt{2})} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．