座標平面上に放物線 $C: y^2=4x$ と点 $\mathrm{A}(-1,\ a)$ がある．ただし，a は実数とする．

(1) C 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{p^2}{4},\ p\right)$ における接線の方程式を p を用いた式で表せ．ただし，$p \fallingdotseq 0$ とする．

(2) 点 A から C に引いた接線は 2 本存在することを証明せよ．また，それら 2 本の接線は直交することを証明せよ．

(3) 点 A から C に引いた 2 本の接線の接点を Q，R とする．直線 QR は C の焦点 F を通ることを証明せよ．

(18 山梨大 工・生環 3)

【答】

(1) $y=\dfrac{2}{p}x+\dfrac{p}{2}$

(2) 略

(3) 略

【解答】

(1) $y^2=4x$ の両辺を x で微分すると

$$2y\cdot\frac{dy}{dx}=4 \qquad \therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{2}{y} \quad (y \fallingdotseq 0)$$

よって，C 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{p^2}{4},\ p\right)$ $(p \fallingdotseq 0)$ における接線の方程式は

$$y-p=\frac{2}{p}\left(x-\frac{p^2}{4}\right)$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{y=\frac{2}{p}x+\frac{p}{2}} \qquad \cdots\cdots ①$$ ……(答)

(2) 原点における C の接線 $x=0$ は点 $\mathrm{A}(-1,\ a)$ を通らないから，点 A を通る接線の方程式は ① として表すことができる．①が点 A を通るとき

$$a=-\frac{2}{p}+\frac{p}{2}$$

$$\therefore \quad p^2-2ap-4=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

p についての 2 次方程式 ② の判別式を D とおくと

$$\frac{D}{4}=a^2+4>0$$

であり，② は異なる 2 つの実数解をもつ．

よって，点 A から C に引いた接線は 2 本存在する． …… (証明終わり)

② の 2 つの実数解を $p_1,\ p_2$ とおくと，解と係数の関係より

$$p_1p_2=-4$$

なので

$$(2\text{ 接線の傾きの積})=\frac{2}{p_1}\cdot\frac{2}{p_2}=\frac{4}{-4}=-1$$

であり，2 本の接線は直交する． …… (証明終わり)

(3) ②の 2 つの実数解 p_1, p_2 は接点の y 座標だから，Q，R の座標を

$$\mathrm{Q}\left(\frac{{p_1}^2}{4},\ p_1\right),\quad \mathrm{R}\left(\frac{{p_2}^2}{4},\ p_2\right)$$

とおくことができる．Q，R における接線の方程式はそれぞれ

$$y=\frac{2}{p_1}x+\frac{p_1}{2},$$
$$y=\frac{2}{p_2}x+\frac{p_2}{2}$$

であり，ともに点 A$(-1,\ a)$ を通るから

$$\begin{cases} a=-\dfrac{2}{p_1}+\dfrac{p_1}{2} \\ a=-\dfrac{2}{p_2}+\dfrac{p_2}{2} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} {p_1}^2-2ap_1-4=0 \\ {p_2}^2-2ap_2-4=0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2\cdot\dfrac{{p_1}^2}{4}-ap_1-2=0 \\ 2\cdot\dfrac{{p_2}^2}{4}-ap_2-2=0 \end{cases}$$

が成り立つ．

これは 2 点 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{{p_1}^2}{4},\ p_1\right)$，$\mathrm{R}\left(\dfrac{{p_2}^2}{4},\ p_2\right)$ が直線

$$2x-ay-2=0 \qquad \cdots\cdots ③$$

上にあることを示している．すなわち，③ は直線 QR の方程式である．

一方，C の焦点 F の座標は $(1,\ 0)$ であり，$(1,\ 0)$ は ③ を満たす．

よって，直線 QR は C の焦点 F$(1,\ 0)$ を通る　　　　……(証明終わり)

- 放物線 $y^2=4px$ (p は正の定数) 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$y_1y=4p\cdot\frac{x_1+x}{2}$$

であり，領域 $y^2>4px$ 内の点 A$(x_0,\ y_0)$ から放物線に引いた 2 本の接線の接点 Q，R を通る直線の方程式は

$$y_0y=4p\cdot\frac{x_0+x}{2}$$

である．このとき A は極点，直線 QR は極線とよばれている．

点 A が準線 $x=-p$ 上にあるとき，点 A に対する極線は焦点 $(p,\ 0)$ を通ることが示される．