三角形 OAB で，辺 OA を $2:1$ に内分する点を L，辺 OB の中点を M，辺 AB を $2:3$ に内分する点を N とする．線分 LM と ON の交点を P とする．$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ を用いて表せ．

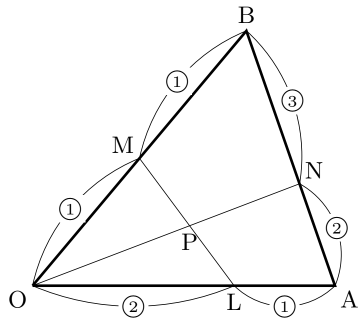
(18 琉球大 教育・農 5(3))

【答】 $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{3\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}}{5}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{6}{17}\overrightarrow{a}+\dfrac{4}{17}\overrightarrow{b}$

【解答】

N は線分 AB を $2:3$ に内分する点であるから

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{3\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}}{5}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$



であり，P は直線 ON 上の点であるから，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3}{5}k\overrightarrow{a}+\frac{2}{5}k\overrightarrow{b} \qquad \cdots\cdots ①$$

と表すことができる．

一方，P は直線 LM 上の点でもあるから，実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OL}}+t\overrightarrow{\mathrm{OM}}\\&=\frac{2}{3}(1-t)\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}t\overrightarrow{b} \qquad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

と表すこともできる．

$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ は 1 次独立 ($\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{0}$，$\overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{0}$，$\overrightarrow{a}\not\parallel\overrightarrow{b}$) であるから，①，②を比較して

$$\begin{cases}\dfrac{3}{5}k=\dfrac{2}{3}(1-t)\\[2mm]\dfrac{2}{5}k=\dfrac{t}{2}\end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases}9k+10t=10\\4k-5t=0\end{cases}$$

が成り立つ．解くと

$$k=\frac{10}{17},\ t=\frac{8}{17}$$

よって

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{6}{17}\overrightarrow{a}+\frac{4}{17}\overrightarrow{b}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．