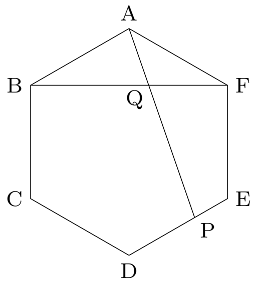
右の図のような 1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF において，線分 DE を 2 : 1 に内分する点を P とし，直線 AP と直線 BF の交点を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \vec{b}$ とおくとき，次の問に答えよ．



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(4) $|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$ の値を求めよ．

(18 佐賀大 理工・教・農 1)

【答】

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 2(\vec{a} + \vec{b})$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{4}{3}\vec{a} + 2\vec{b}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \dfrac{2}{5}\vec{a} + \dfrac{3}{5}\vec{b}$

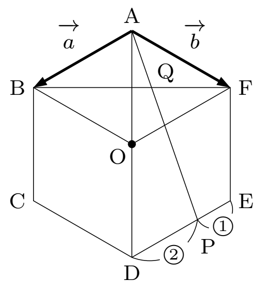
(4) $|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}| = \dfrac{\sqrt{7}}{5}$

【解答】

(1) 線分 AD の中点を O とおく．

△OAB，△OFA はともに 1 辺の長さが 1 の正三角形であり，四角形 OFAB はひし形であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AO}} = \boldsymbol{2(\vec{a} + \vec{b})} \quad \cdots\cdots(答)$$



(2) P は線分 DE を 2 : 1 に内分する点であり，$\overrightarrow{\mathrm{DE}} = -\vec{a}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{DP}}\\ &= 2(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{2}{3}(-\vec{a}) \quad (\because\ (1))\\ &= \boldsymbol{\frac{4}{3}\vec{a} + 2\vec{b}} \quad \cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

- 分点公式を用いてもよい．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{AD}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AE}}}{3}\\ &= \frac{2(\vec{a} + \vec{b}) + 2\{\vec{b} + (\vec{a} + \vec{b})\}}{3}\\ &= \frac{4}{3}\vec{a} + 2\vec{b}\end{aligned}$$

(3) Q は直線 AP 上の点であるから，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{4}{3}k\vec{a} + 2k\vec{b} \qquad \cdots\cdots ①$$

と表すことができる．

また，Q は直線 BF 上の点でもあるから，実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{BF}}\\ &= \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})\\ &= (1-t)\vec{a} + t\vec{b} \qquad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

と表すこともできる．$\vec{a}$，$\vec{b}$ は一次独立（$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$，$\vec{a} \not\parallel \vec{b}$）であるから，①，② の係数を比較することができ

$$\begin{cases}\dfrac{4}{3}k = 1 - t\\ 2k = t\end{cases} \qquad \therefore \quad k = \frac{3}{10}, \quad t = \frac{3}{5}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \boldsymbol{\dfrac{2}{5}\vec{a} + \dfrac{3}{5}\vec{b}}$　……（答）

- ① より

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{4}{3}k\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2k\overrightarrow{\mathrm{AF}}$$

Q は直線 BF 上の点でもあるから

$$\frac{4}{3}k + 2k = 1 \qquad \therefore \quad k = \frac{3}{10}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \dfrac{2}{5}\vec{a} + \dfrac{3}{5}\vec{b}$

- (2) の結果より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{4\vec{a} + 6\vec{b}}{3} = \frac{10}{3}\,\frac{2\vec{a} + 3\vec{b}}{5}$$

R を $\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \dfrac{2\vec{a} + 3\vec{b}}{5}$ を満たす点として定めると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{10}{3}\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ より R は直線 AP 上の点であり，$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AF}}}{5}$ より，R は線分 BF，すなわち直線 BF 上の点である．この 2 つのことより，R は直線 AP と直線 BF との交点 Q である．

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \dfrac{2\vec{a} + 3\vec{b}}{5}$

(4) まず

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ = 1 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2 &= \left|\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}\right|^2 = \frac{4}{25}|\vec{a}|^2 + \frac{12}{25}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{9}{25}|\vec{b}|^2\\ &= \frac{4}{25} - \frac{6}{25} + \frac{9}{25}\\ &= \frac{7}{25}\end{aligned}$$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}| = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{7}}{5}}$　……（答）