四角形 ABCD において $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{DA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ として，ベクトル $\vec{p}$ を $\vec{p}=|\vec{d}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}+|\vec{b}|\vec{c}+|\vec{c}|\vec{d}$ で定める．以下の問いに答えよ，

(1) $\vec{d}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

(2) 辺 AD と辺 BC は平行であるとする．$\vec{p}=\vec{0}$ は，四角形 ABCD が平行四辺形であるための必要十分条件であることを示せ．

(18 奈良女大 理 1)

【答】

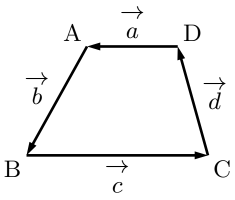
(1) $\vec{d}=-\vec{c}-\vec{b}-\vec{a}$

(2) 略

【解答】

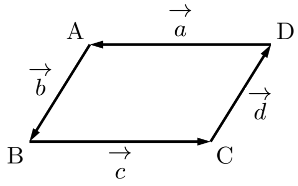
(1)
$$\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\vec{0}$$
であり，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ で表すと
$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0} \qquad \therefore\ \vec{d}=\boldsymbol{-\vec{c}-\vec{b}-\vec{a}}$$
……(答)

(2) (1) より



$$\begin{aligned}\vec{p}&=|\vec{d}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}+|\vec{b}|\vec{c}+|\vec{c}|(-\vec{c}-\vec{b}-\vec{a})\\&=(|\vec{d}|-|\vec{c}|)\vec{a}+(|\vec{a}|-|\vec{c}|)\vec{b}+(|\vec{b}|-|\vec{c}|)\vec{c}\end{aligned}$$
AD // BC より $\vec{c}=-k\vec{a}$ (k は正の実数) と表せるから
$$\begin{aligned}\vec{p}&=(|\vec{d}|-k|\vec{a}|)\vec{a}+(|\vec{a}|-k|\vec{a}|)\vec{b}-k(|\vec{b}|-k|\vec{a}|)\vec{a}\\&=(|\vec{d}|-k|\vec{a}|-k|\vec{b}|+k^2|\vec{a}|)\vec{a}+(|\vec{a}|-k|\vec{a}|)\vec{b}\\&=(|\vec{d}|-k|\vec{b}|+(k^2-k)|\vec{a}|)\vec{a}+(1-k)|\vec{a}|\vec{b}\end{aligned}$$
より
$$\vec{p}=\vec{0} \iff (|\vec{d}|-k|\vec{b}|+(k^2-k)|\vec{a}|)\vec{a}+(1-k)|\vec{a}|\vec{b}=\vec{0} \qquad \cdots\cdots ①$$
である．$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 1 次独立より
$$① \iff \begin{cases}|\vec{d}|-k|\vec{b}|+(k^2-k)|\vec{a}|=0\\(1-k)|\vec{a}|=0\end{cases}$$

4 点 A，B，C，D が四角形をつくることから $\vec{a}\neq\vec{0}$ であり



$$\begin{aligned}① &\iff \begin{cases}k=1\\|\vec{d}|=|\vec{b}|\end{cases}\\&\iff \begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=-\overrightarrow{\mathrm{DA}}\\|\vec{d}|=|\vec{b}|\end{cases}\\&\iff \overrightarrow{\mathrm{BC}}=-\overrightarrow{\mathrm{DA}}\\&\iff \text{四角形 ABCD は平行四辺形}\end{aligned}$$
……(証明終わり)

- 教科書 (東京書籍) では

  「$\overrightarrow{a} \fallingdotseq \overrightarrow{0}$，$\overrightarrow{b} \fallingdotseq \overrightarrow{0}$ かつ $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が平行でない」　　…… $(*)$

  とき，1 次独立という，と書かれている．$(*)$ の別表現が

  $\alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ ならば $\alpha = \beta = 0$　　…… $(**)$

  です．$(*) \iff (**)$ であること (ここ参照) は背理法により示すことができます．