$\mathrm{OA}=\sqrt{7}$，$\mathrm{OB}=\sqrt{5}$，$\mathrm{AB}=\sqrt{6}$ の $\triangle\mathrm{OAB}$ の外接円の中心を C とする．
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ として，次の問いに答えよ．

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ．

(2) $\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ をみたす実数 s, t を求めよ．

(3) 点 O を座標平面上の原点にとり，点 A の座標を $\left(0,\ \sqrt{7}\right)$ とする．このとき点 B，C の座標をそれぞれ求めよ．ただし，点 B は第 1 象限にあるとする．

(18 新潟大 理系 1 文系 2)

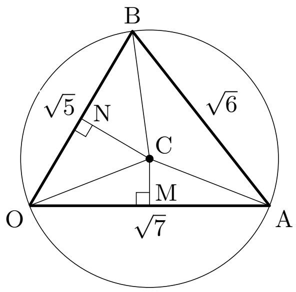
【答】

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\dfrac{7}{2}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{5}{2}$

(2) $s=\dfrac{5}{13}$，$t=\dfrac{7}{26}$

(3) $\mathrm{B}\left(\sqrt{\dfrac{26}{7}},\ \dfrac{3}{\sqrt{7}}\right)$，$\mathrm{C}\left(\sqrt{\dfrac{7}{26}},\ \dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)$

【解答】



(1) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{6}$ より

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2=6$$
$$|\vec{b}|^2+|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=6$$

$|\vec{a}|=\sqrt{7}$，$|\vec{b}|=\sqrt{5}$ であるから

$$5+7-2\vec{a}\cdot\vec{b}=6$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=3} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

C は $\triangle\mathrm{OAB}$ の外心であるから，辺 OA，OB の垂直二等分線の交点である．辺 OA の中点を M とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos\angle\mathrm{AOC}=|\vec{a}|\times\mathrm{OM}$$
$$=\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{7}}{2}=\boldsymbol{\frac{7}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

- $\overrightarrow{\mathrm{CM}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{CM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$

$$\overrightarrow{\mathrm{CM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=\frac{7}{2}-\vec{a}\cdot\vec{c}$$

であるから

$$\frac{7}{2}-\vec{a}\cdot\vec{c}=0 \qquad \therefore\quad \vec{a}\cdot\vec{c}=\frac{7}{2}$$

としてもよいが，上の【解答】のように

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}|\times|\vec{c}|\cos\angle\mathrm{AOC}=|\vec{a}|\times(\vec{c}\text{ の }\vec{a}\text{ への符号付き正射影})$$

とみるのが直接的な解法だろう．

同様に，辺 OB の中点を N とすると

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\angle\mathrm{COB}=|\vec{b}|\times\mathrm{ON}$$

$$=\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{5}}{2}=\boldsymbol{\frac{5}{2}}$$ ……(答)

(2) $\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくとき

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(s\vec{a}+t\vec{b})=s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}=7s+3t$$

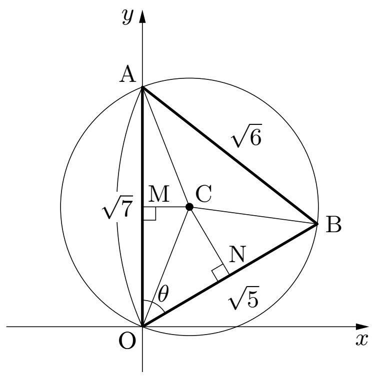
$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot(s\vec{a}+t\vec{b})=s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=3s+5t$$

であるから，(1) の結果の

$$\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{c}=\dfrac{7}{2}\\ \vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{5}{2}\end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{cases}7s+3t=\dfrac{7}{2}\\ 3s+5t=\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{s=\frac{5}{13},\quad t=\frac{7}{26}}$$ ……(答)

(3) $\angle\mathrm{BOA}=\theta$ とおくと



$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\sqrt{5}\begin{pmatrix}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\end{pmatrix}=\sqrt{5}\begin{pmatrix}\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

である．ここで

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{3}{\sqrt{7}\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{35}}$$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{3}{\sqrt{35}}\right)^2}=\sqrt{\frac{26}{35}}$$

よって，B の座標は

$$\mathbf{B}\left(\sqrt{\boldsymbol{\frac{26}{7}}},\ \boldsymbol{\frac{3}{\sqrt{7}}}\right)$$ ……(答)

また

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{5}{13}\vec{a}+\frac{7}{26}\vec{b}=\frac{5}{13}\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{7}\end{pmatrix}+\frac{7}{26}\begin{pmatrix}\sqrt{\dfrac{26}{7}}\\ \dfrac{3}{\sqrt{7}}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{5\sqrt{7}}{13}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\sqrt{\dfrac{7}{26}}\\ \dfrac{3\sqrt{7}}{26}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{\dfrac{7}{26}}\\ \dfrac{\sqrt{7}}{2}\end{pmatrix}$$

よって，C の座標は

$$\mathbf{C}\left(\sqrt{\boldsymbol{\frac{7}{26}}},\ \boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right)$$ ……(答)

である．