$\triangle$ABC の各頂点 A，B，C の対辺の長さをそれぞれ a，b，c，重心を G，内心を I とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{IG}} = \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{b}{a+b+c}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{c}{a+b+c}\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を証明せよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{IG}} = \overrightarrow{0}$ は，$\triangle$ABC が正三角形であるための必要十分条件であることを証明せよ．

(3) $\triangle$ABC が正三角形でないとき，次の条件 p，q は同値であることを証明せよ．

p: 順番を適当に入れ替えれば，a，b，c は等差数列をなす．

q：線分 IG と平行な辺が存在する．

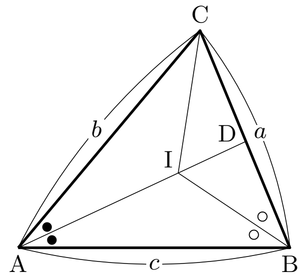
(18 浜松医大 3)

【答】

(1) 略
(2) 略
(3) 略

【解答】

(1) I は $\triangle$ABC の内心より，直線 AI と辺 BC の交点を D とすると，AD は $\angle$BAC の二等分線である．



$$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = \mathrm{BA} : \mathrm{AC} = c : b$$

BI は $\angle$ABC の二等分線より

$$\mathrm{AI} : \mathrm{ID} = \mathrm{AB} : \mathrm{BD} = c : \frac{c}{b+c}a = (b+c) : a$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AI}} &= \frac{b+c}{a+(b+c)}\overrightarrow{\mathrm{AD}} \\ &= \frac{b+c}{a+b+c}\,\frac{b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{b+c} \\ &= \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

また，G は $\triangle$ABC の重心であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}$$

である．よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{IG}} &= \overrightarrow{\mathrm{AG}} - \overrightarrow{\mathrm{AI}} \\ &= \left(\frac{1}{3} - \frac{b}{a+b+c}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \left(\frac{1}{3} - \frac{c}{a+b+c}\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

$\cdots\cdots$ (証明終わり)

(2) (1) より

$$\overrightarrow{\mathrm{IG}} = \overrightarrow{0} \iff \left(\frac{1}{3} - \frac{b}{a+b+c}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \left(\frac{1}{3} - \frac{c}{a+b+c}\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{0} \quad \cdots\cdots (*)$$

である．まず，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は 1 次独立だから

$$(*) \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{3} - \dfrac{b}{a+b+c} = 0 \\ \dfrac{1}{3} - \dfrac{c}{a+b+c} = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} (a+b+c) - 3b = 0 \\ (a+b+c) - 3c = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad a = b = c$$

すなわち，△ABC は正三角形である．

逆に，△ABC が正三角形ならば，$a = b = c$ であるから

$$\frac{1}{3} - \frac{b}{a+b+c} = \frac{1}{3} - \frac{b}{3b} = 0$$

$$\frac{1}{3} - \frac{c}{a+b+c} = \frac{1}{3} - \frac{c}{3c} = 0$$

であり，$(*)$ は成り立つ．

よって，$\overrightarrow{\mathrm{IG}} = \overrightarrow{0}$ は，△ABC が正三角形であるための必要十分条件である．

……(証明終わり)

(3) (2) より

$$\triangle\mathrm{ABC} \text{ が正三角形でない} \iff \overrightarrow{\mathrm{IG}} \fallingdotseq \overrightarrow{0} \qquad \cdots\cdots (**)$$

である．

(I) $p \Longrightarrow q$ について；

条件 p を等差数列をなす $a,\ b,\ c$ の順序で場合分けする．

(i) a が等差中項であるとき，$2a = b + c$ であり

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{IG}} &= \left(\frac{1}{3} - \frac{b}{a+b+c}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \left(\frac{1}{3} - \frac{c}{a+b+c}\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\
&= \left(\frac{1}{3} - \frac{b}{3a}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \left(\frac{1}{3} - \frac{c}{3a}\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\
&= \frac{a-b}{3a}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{a-c}{3a}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\
&= \frac{c-a}{3a}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}) \quad (\because\ a - b = c - a) \\
&= \frac{c-a}{3a}\overrightarrow{\mathrm{CB}}
\end{aligned}$$

$(**)$ より $\dfrac{c-a}{3a} \fallingdotseq 0$ であり，IG // CB である．

(ii) b が等差中項であるとき，$2b = c + a$ であり

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{IG}} &= \left(\frac{1}{3} - \frac{b}{a+b+c}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \left(\frac{1}{3} - \frac{c}{a+b+c}\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\
&= \left(\frac{1}{3} - \frac{b}{3b}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \left(\frac{1}{3} - \frac{c}{3b}\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\
&= \frac{b-c}{3b}\overrightarrow{\mathrm{AC}}
\end{aligned}$$

$(**)$ より $\dfrac{b-c}{3b} \fallingdotseq 0$ であり，IG // AC である．

(iii) c が等差中項であるとき，$2c=a+b$ であり

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{IG}}&=\left(\frac{1}{3}-\frac{b}{a+b+c}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left(\frac{1}{3}-\frac{c}{a+b+c}\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=\left(\frac{1}{3}-\frac{b}{3c}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left(\frac{1}{3}-\frac{c}{3c}\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=\frac{c-b}{3c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\end{aligned}$$

$(**)$ より $\dfrac{c-b}{3c}\fallingdotseq 0$ であり，IG // AB である．

以上 (i)，(ii)，(iii) いずれのときも線分 IG と平行な辺が存在する．すなわち，$p\Longrightarrow q$ は成り立つ．

(II) $p\Longleftarrow q$ について；

条件 q を線分 IG がどの辺と平行かで場合分けする．

(i) 線分 IG が辺 AB と平行であるとき

$\overrightarrow{\mathrm{IG}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす 0 でない実数 k が存在するから

$$k\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(\frac{1}{3}-\frac{b}{a+b+c}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left(\frac{1}{3}-\frac{c}{a+b+c}\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は 1 次独立より

$$\begin{cases}k=\dfrac{1}{3}-\dfrac{b}{a+b+c}\\[2mm]0=\dfrac{1}{3}-\dfrac{c}{a+b+c}\end{cases}\iff\begin{cases}2c=a+b\\k=\dfrac{1}{3}-\dfrac{b}{2c+c}\end{cases}\iff\begin{cases}2c=a+b\\k=\dfrac{c-b}{3c}\end{cases}$$

$\triangle$ABC は正三角形でないから $c\fallingdotseq b$ であり，0 でない実数 k が存在し，$2c=a+b$ である．a, b, c は b, c, a の順に等差数列をなす．

(ii) 線分 IG が辺 BC と平行であるとき

$\overrightarrow{\mathrm{IG}}=k\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を満たす 0 でない実数 k が存在するから

$$k(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})=\left(\frac{1}{3}-\frac{b}{a+b+c}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left(\frac{1}{3}-\frac{c}{a+b+c}\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は 1 次独立より

$$\begin{cases}-k=\dfrac{1}{3}-\dfrac{b}{a+b+c}\\[2mm]k=\dfrac{1}{3}-\dfrac{c}{a+b+c}\end{cases}\iff\begin{cases}k=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{b}{a+b+c}\\[2mm]-\dfrac{1}{3}+\dfrac{b}{a+b+c}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{c}{a+b+c}\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}k=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{b}{a+b+c}\\[2mm]\dfrac{b+c}{a+b+c}=\dfrac{2}{3}\end{cases}\iff\begin{cases}k=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{b}{a+b+c}\\[2mm]2a=b+c\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}2a=b+c\\k=\dfrac{b-a}{3a}\end{cases}$$

$\triangle$ABC は正三角形でないから $a\fallingdotseq b$ であり，0 でない実数 k が存在し，$2a=b+c$ である．a, b, c は c, a, b の順に等差数列をなす．

(iii) 線分 IG が辺 CA と平行であるとき

$\overrightarrow{\mathrm{IG}}=k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たす 0 でない実数 k が存在するから

$$k\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left(\frac{1}{3}-\frac{b}{a+b+c}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left(\frac{1}{3}-\frac{c}{a+b+c}\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は 1 次独立より

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{b}{a+b+c} \\ k = \dfrac{1}{3} - \dfrac{c}{a+b+c} \end{cases} \iff \begin{cases} 2b = c+a \\ k = \dfrac{1}{3} - \dfrac{c}{2b+b} \end{cases} \iff \begin{cases} 2b = c+a \\ k = \dfrac{b-c}{3b} \end{cases}$$

△ABC は正三角形でないから $b \fallingdotseq c$ であり，0 でない実数 k が存在し，$2b = c+a$ である．a, b, c は a, b, c の順に等差数列をなす．

以上 (i)，(ii)，(iii) いずれのときも a, b, c は等差数列をなす．すなわち，$p \Longleftarrow q$ は成り立つ．

(I)，(II) より，p, q は同値である． …… (証明終わり)